ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXIX 1984 1

УДК 517.53

МАТЕМАТИКА

Г. Г. Геворкян

# О множествах относительной единственности для интегралов Фурье

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР А. А. Талаляном 1/IV 1983)

В работе ([1]) доказана следующая

Теорема 1. *Для любого* $\varepsilon>0$ *существует измеримое множество* $E\subset(-\infty, +\infty)$, $\mu E<\varepsilon$, *которое обладает следующими свойствами:*

1) *если* $f(x)\in L_2(-\infty, +\infty)$, $f(x)=0$ *п. в. на* $E$ *и* $\hat{f}(x)\in L_p(-\infty, +\infty)$ *для некоторого* $p$, $1\leqslant p<2$, *то* $\hat{f}(x)=0$ *п. в. на* $(-\infty, +\infty)$;

2) *если* $f(x)\in L_p(-\infty, +\infty)\cap L_2(-\infty, +\infty)$ *для некоторого* $p$, $1\leqslant p<2$ *и* $\hat{f}(x)=0$ *при* $x\in E$, *то* $f(x)=0$ *п. в. на* $(-\infty, +\infty)$.

Здесь и в дальнейшем рассматривается преобразование Фурье в классе $L_2(-\infty, +\infty)$, т. е. $f(x)\in L_2(-\infty, +\infty)$ и

$$\hat{f}(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\underset{\sigma\to+\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\int_{-\sigma}^{\sigma}e^{-itx}f(t)dt,$$

где $\underset{\sigma\to+\infty}{\mathrm{l.i.m.}}$ обозначает предел в смысле сходимости в $L_2(-\infty, +\infty)$ при $\sigma\to+\infty$.

В настоящей заметке в некотором смысле обобщается эта теорема. Для формулировки результатов приведем некоторые определения.

Определение 1. *Скажем, что множество* $E\subset(-\infty, +\infty)$ *является* $U_p$ *множеством для преобразования Фурье (короче* $U_p$ *множеством), если из условий* $f(x)\in L_2(-\infty, +\infty)$, $f(x)=0$ *п. в. на* $E$ и $\hat{f}(x)\in L_p(-\infty, +\infty)$ *следует, что* $f(x)=0$ *п. в. на* $(-\infty, +\infty)$.

Определение 2. *Скажем, что множество* $E\subset(-\infty, +\infty)$ *является* $U_p^*$ *множеством для интеграла Фурье (короче* $U_p^*$ *множеством), если из условий*

1) $f(x)\in L_2(-\infty, +\infty)$, $\hat{f}(x)\in L_p(-\infty, +\infty)$,

2) $f_N(x)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\,\frac{4\sin^2\frac{N(x-t)}{2}}{(x-t)^2N}\,dt\to0$ *для любого* $x\in E$ *следует,*

*что* $f(x)=0$ *почти всюду на* $(-\infty, +\infty)$.

Известно, что $\lim_{N\to\infty} f_N(x)=f(x)$ п. в. Поэтому всякое $U_p$ множество является $U_p^*$ множеством.

Ясно, что для $p\geqslant 2$ $U_p$ (или $U_p^*$) множества с точностью до множества меры нуль совпадают с прямой $(-\infty, +\infty)$. Поэтому интереснее рассмотреть $U_p$ (соответственно $U_p^*$) множества при $p<2$.

В работе [2] доказана

Теорема 2. *Существует множество $E\subset(-\infty, +\infty)$, $\mu E=0$, которое является $U_p^*$ множеством для интеграла Фурье при любом $p<2$.*

Вообще, если $E$ является $U_p$ (или $U_p^*$) множеством, то оно является также $U_{p'}$ (соответственно $U_{p'}^*$) множеством при любом $p'<p$.

Верны следующие теоремы.

Теорема 3. *Для любого $p$, $1<p\leqslant 2$, существует множество $E\subset(-\infty, +\infty)$, которое не является $U_p$ множеством для преобразования Фурье и является $U_{p'}$ множеством при любом $p'<p$.*

Теорема 4. *Для любого $p$, $1<p\leqslant 2$, существует такое $U_p$ множество для преобразования Фурье, которое не является $U_{p'}$ множеством при всех $p'>p$.*

Теорема 5. *Для любого $p$, $1<p\leqslant 2$, существует множество $E\subset(-\infty, +\infty)$, $\mu E=0$, которое не является $U_p^*$ множеством для интеграла Фурье и является $U_{p'}^*$ множеством при любом $p'<p$.*

Теорема 6. *Для любого $p$, $1\leqslant p<2$, существует множество $E\subset(-\infty, +\infty)$, $\mu E=0$, которое является $U_p^*$ множеством и не является $U_{p'}^*$ множеством для интеграла Фурье ни при одном $p'>p$.*

Аналогичные вопросы для ортогональных рядов рассмотрены в работах [3–9].

При доказательстве вышеуказанных теорем основную роль играет следующая

Лемма 1. *Существует некоторая положительная константа $A$ такая, что для любого $p$, $1<p<2$, любого отрезка $\left[\frac{x-1}{2^k}2\pi, \frac{x}{2^k}2\pi\right]$ и любого натурального $m$ при достаточно больших $\nu$ справедливы следующие неравенства:*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{\varphi}(x)|^p dx<A2^{(1-p)(k+m)},$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(x)|^q dx<A2^{m-k\frac{1}{p-1}},$$

*где*

$$f(x)=\begin{cases} 1 \text{ на } \bigcup_{j=1}^{2^\nu}\left(\frac{x-1}{2^k}2\pi+\frac{j-1}{2^{k+\nu}}2\pi+\frac{1}{2^{k+\nu+m}}2\pi,\ \frac{x-1}{2^k}2\pi+\frac{j}{2^{k+\nu}}2\pi\right) \\ 1-2^m \text{ на } \bigcup_{j=1}^{2^\nu}\left(\frac{x-1}{2^k}2\pi+\frac{j-1}{2^{k+\nu}}2\pi,\ \frac{x-1}{2^k}2\pi+\frac{j-1}{2^{k+\nu}}2\pi+\frac{1}{2^{k+\nu+m}}2\pi\right) \\ 0 \text{ в остальных случаях} \end{cases}$$

$$\varphi(x)=\begin{cases} 1 \text{ на } \bigcup_{j=1}^{2^\nu}\left[\frac{\varkappa-1}{2^k}2\pi+\frac{j-1}{2^{k+\nu}}2\pi,\ \frac{\varkappa-1}{2^k}2\pi+\frac{j-1}{2^{k+\nu}}2\pi+\frac{1}{2^{k+\nu+m}}2\pi\right) \\ -1 \text{ на } \bigcup_{j=1}^{2^\nu}\left[\frac{\varkappa-1}{2^k}2\pi+\frac{j-1}{2^{k+\nu}}2\pi+\frac{1}{2^{k+\nu+m}}2\pi,\ \frac{\varkappa-1}{2^k}2\pi+\frac{j-1}{2^{k+\nu}}2\pi+\frac{2}{2^{k+\nu+m}}2\pi\right) \\ 0 \text{ в остальных случаях} \end{cases}$$

*а $q$ сопряженное к $p$, т. е.* $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$

Для фиксированного $p$, $1<p\leqslant 2$, применяя лемму 1, строятся открытые множества $E^{(i)}$, которые не являются $U_p$ множествами и являются $U_{p'}$ множествами при любом $p'<p$, причем $\mu E^{(i)}\to 0$.

Далее, применяя леммы 2, 3, 4, доказывается, что множество $\bigcap_{i=1}^{\infty} E^{(i)}$ не является $U_p^*$ множеством и является $U_{p'}^*$ множеством при любом $p'<p$.

Лемма 2. *Для любых $\varepsilon>0$, $p'<p$ и $[a, b]=\left[\frac{\nu}{2^k}2\pi, \frac{\varkappa}{2^m}2\pi\right]\subset[0, 2\pi]$ существует монотонная сингулярная функция $f(x)$ такая, что носитель меры $df(x)$ лежит в $\bigcap_{i=1}^{\infty}E^{(i)}$ и*

$$\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b e^{itx}d[f(x)-x]\right|^{q'}dt\right\}^{\frac{1}{q'}}<\varepsilon,$$

*где $q'$ сопряженное к $p'$.*

Лемма 3. *Пусть* $f(x)\in L_2(-\infty, +\infty)$ *и* $f_\sigma(x)=$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\frac{4\sin^2\frac{\sigma(x-t)}{2}}{(x-t)^2\sigma}dt,\ 0<\sigma<+\infty,$$ *суммы Фейера ее интеграла Фурье. Если $\lambda(x)$ непрерывно дифференцируемая ограниченная функция, то*

$$\frac{\lambda(x)}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\frac{4\sin^2\frac{\sigma(x-t)}{2}}{(x-t)^2\sigma}dt-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\lambda(t)\frac{4\sin^2\frac{\sigma(x-t)}{2}}{(x-t)^2\sigma}dt\to 0 \text{ при } \sigma\to+\infty.$$

*Эта лемма доказана в* (2) (*см.* (2), *лемма* 1).

Лемма 4. *Пусть $f(x)\in L_2(-\infty, +\infty)$ такая, что $\hat{f}(x)\in L_p(-\infty, +\infty)$ для некоторого $p$, $1\leqslant p\leqslant 2$, тогда для произвольной бесконечно дифференцируемой финитной функции преобразование Фурье функции $f(x)\lambda(x)$ принадлежит классу $L_p(-\infty, +\infty)$.*

Таками же путями доказываются теоремы 4, 6.

Ереванский государственный университет

Գ. Գ. ԳԵՎՈՐԳՅԱՆ

## Ֆուրյեի ինտեգրալների հարաբերական միակության բազմությունների մասին

*Աշխատանքում դիտարկվում են $U_p$ և $U_p^*$ բազմություններ Ֆուրյեի ինտեգրալների համար։ Մասնավորապես, ապացուցված է, որ կամայական $1\leqslant p<p'\leqslant 2$ համար գոյություն ունի $U_p(U_p^*)$ բազմություն, որը չի հանդիսանում $U_{p'}$ (համապատասխանաբար $U_{p'}^*$) բազմություն Ֆուրյեի ինտեգրալի համար։*

### ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Г. Г. Геворкян*, ДАН АрмССР, т. 72, № 4 (1981). [2] *Г. Г. Геворкян*, ДАН АрмССР, т. 73, №4 (1981). [3] *Y. Katznelson*, Bull. Amer. Math. Soc., v. 70 (1964). [4] *L. Golzani*, Bull. U. M. I., v. 16—B (1979). [5] *L. Golzani*, Proc. A. M. S., v. 83, №3 (1981). [6] *Г. Г. Геворкян*, Мат. заметки, т. 32, №5 (1982). [7] *L. Michele. P. M. Soardi*, Boll. U. M. I., v. (4) 11 (1975). [8] *Г. Г. Геворкян*, Уч. зап, ЕГУ, №2, 1981. [9] *Г. Г. Геворкян*, ДАН АрмССР, т. 77, №4 (1983).