

УДК 515.1

МАТЕМАТИКА

Э. А. Мирзаханян

О некоторых свойствах бесконечномерных гомотопических групп подмножеств гильбертова пространства

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. А. Александрияном 23/III 1983)

В статье приводятся некоторые свойства построенных в ^(1,2) бесконечномерных гомотопических групп $\Pi_q(X, x_0)$ и $\Pi_q^c(X, x_0)$ компактного типа множеств вещественного сепарабельного гильбертова пространства H . Допустимым классом непрерывных отображений служит введенный В. Г. Болтянским ⁽³⁾ класс K_0 отображений $f: M \rightarrow H$ подмножеств пространства H .

Приведем определение класса K_0 . Пусть G — открытое подмножество пространства H и $f: G \rightarrow H$ — непрерывное отображение. Будем говорить, что отображение f принадлежит классу K_0 , если f обладает следующим свойством: для любой точки $x_0 \in G$ и любого числа $\epsilon > 0$ существуют такое конечномерное подпространство $L \subset H$, такая окрестность $U \subset G$ точки x_0 в H и такие действительные числа λ и $\delta > 0$ ($0 < \delta < \frac{\pi}{2}$), что если $x, y \in U$ и угол между вектором $x - y$ и подпространством L не меньше $\frac{\pi}{2} - \delta$, то выполнено соотношение

$$\|f(x) - f(y) - \lambda(x - y)\| \leq \epsilon \|x - y\|.$$

Фигурирующее в приведенном выше определении действительное число λ можно выбрать так, чтобы оно определялось только точкой x_0 и было пригодно для любого числа $\epsilon > 0$. Получающаяся таким образом действительная функция $\lambda(x) = \lambda_{x_0}(x)$, заданная на G , непрерывна и единственна и называется терминальной производной отображения f .

Пусть M — произвольное подмножество пространства H . Мы будем говорить, что непрерывное отображение $f: M \rightarrow H$ принадлежит классу K_0 , если существует открытое в H множество $G \supset M$ и непрерывное отображение $g: G \rightarrow H$, которое принадлежит классу K_0 и совпадает на M с отображением f .

Рассмотрим теперь бесконечномерные гомотопические группы $\Pi_q^c(S, x_0)$ и $\Pi_q(S, x_0)$ единичной сферы S пространства H . Пусть α — произвольный элемент группы $\Pi_q^c(S, x_0)$ и $f: (H, H \setminus B) \rightarrow (S, x_0)$, где B — единичный замкнутый шар пространства H , некоторый сфероид

индекса q компактного типа сферы S точки x_0 , принадлежащий классу α . Рассматривая f как сфероид некомпактного типа сферы S точки x_0 и обозначая через $\theta(\alpha)$ элемент группы $\Pi_q(S, x_0)$, имеющий в качестве представителя сфероид f , мы можем построить отображение $\theta: \Pi_q^c(S, x_0) \rightarrow \Pi_q(S, x_0)$. Так как групповые операции в этих группах определяются одинаково, то отображение θ представляет собой гомоморфизм. Имеет место следующее утверждение.

Теорема 1. *Гомоморфизм $\theta: \Pi_q^c(S, x_0) \rightarrow \Pi_q(S, x_0)$ является мономорфизмом при любом целом q .*

Замечание. Аналогичным образом можно доказать, что теорема 1 остается справедливой, если единичную сферу S (имеющую дефект 1 относительно H) заменить сферой S_r конечного дефекта r относительно пространства H .

Следствие. В классе K_0 единичная сфера пространства H нестягиваема по себе в точку.

Действительно, легко показать, что если бы в классе K_0 сфера S была стягиваема по себе в точку $x_0 \in S$, то группа $\Pi_q(S, x_0)$ была бы тривиальна при любом целом q . Между тем из теоремы 1 следует, что не все группы $\Pi_q(S, x_0)$ тривиальны, например, при $q=1$, ибо группа $\Pi_1^c(S, x_0) \approx Z$ (сл. (2)).

Замечание. Следует отметить, что в классе всех непрерывных отображений подмножеств пространства H единичная сфера S стягивается по себе в точку. Важность полученного факта состоит в том, что в классе K_0 остается справедливым соответствующее утверждение для единичной сферы S^{n-1} евклидова пространства R^n .

Пусть X и Y такие подмножества пространства H , что $X \subset H_1$ и $Y \subset H_2$, где линейные подпространства H_1, H_2 пространства H обладают тем свойством, что $H = H_1 \oplus H_2$. Предположим, далее, что одно из этих подпространств, например, H_2 , имеет конечный дефект в H (стало быть, H_1 конечномерно). Положим $Z = X \times Y$ и выберем точки $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$ и $z_0 \in Z$, где $z_0 = (x_0, y_0)$. В сделанных обозначениях справедлива следующая теорема о прямом произведении бесконечномерных гомотопических групп.

Теорема 2. *Для любого целого q имеет место изоморфизм*

$$\Pi_q(Z, z_0) \approx \Pi_q(X, x_0) \oplus \Pi_q(Y, y_0).$$

Следующее свойство бесконечномерных гомотопических групп является непосредственным следствием приведенной ниже леммы, доказательство которой содержится в статье (5).

Лемма. *Пусть G открытое подмножество пространства H и $f: G \rightarrow X$ отображение класса K_0 ; тогда если множество X конечномерно или локально компактно, то терминальная производная $\lambda_f(x)$ отображения f тождественно равна нулю на множестве G .*

Теорема 3. *Если множество $X \subset H$ конечномерно или*

локально компактно, то для любой точки $x_0 \in X$ и при любом целом q бесконечномерная гомотопическая группа $\Pi_q^c(X, x_0)$ компактного типа тривиальна.

Ереванский государственный университет

Է. Ա. ՄԻՐՁԱԽԱՆՅԱՆ

Հիլբերտյան տարածության ենթաբազմությունների անվերջ չափանի հոմոտոպիկ խմբերի որոշ հատկությունների մասին

Հոդվածում բերվում են իրական սեպարաբլ հիլբերտյան տարածության ենթաբազմությունների ^(1,2)-ում կառուցված անվերջ չափանի հոմոտոպիկ $\Pi_q(X, x_0)$ և կոմպակտային տիպի $\Pi_q^c(X, x_0)$ խմբերի որոշ հատկություններ: Որպես անընդհատ արտապատկերումների թուլլատրելի դաս ծառայում է [3]-ում կառուցված K_0 դասը:

Մասնավորապես պարզվում է, որ H տարածության S միավոր սֆերայի համար լուրաքանչյուր q ամբողջ թվի դեպքում գոյություն ունի $\Pi_q^c(S, x_0)$ խմբի մոնոմորֆիզմ $\Pi_q(S, x_0)$ խմբի մեջ:

Այստեղից հետևում է, որ K_0 դասում S սֆերան չի սեղմվում իր նկատմամբ կետի: Այնուհետև, եթե X բազմությունը վերջավոր չափանի է կամ լոկալ կոմպակտ է, ապա ցանկացած q -ի դեպքում $\Pi_q^c(X, x_0)$ խումբը տրիվիալ է:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ Э. А. Мирзаханян, Изв. АН АрмССР. Математика, т. 8, № 3 (1973). ² Э. А. Мирзаханян, Изв. АН АрмССР. Математика, т. 10, № 2 (1975). ³ В. Г. Болтянский, Изв. АН АрмССР. Математика, т. 9, № 2 (1974). ⁴ В. Г. Болтянский, Э. А. Мирзаханян, Изв. АН АрмССР. Математика, т. 9, № 5 (1974). ⁵ Э. А. Мирзаханян, Изв. АН АрмССР. Математика, т. 15, № 5 (1980).

