ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXIX 1984 1

УДК 517.988

МАТЕМАТИКА

А. Б. Нерсесян, Н. А. Чернявская

Об обращении интегральных операторов с почти разностным ядром

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 9/III 1983)

В работе ([1]) были введены в рассмотрение интегральные операторы второго рода с ядром $K(x, t)$, удовлетворяющим соотношению

$$\frac{\partial K}{\partial x}+\frac{\partial K}{\partial t}=q(t)p(x), \qquad (*)$$

где K—матрица размеров $(m\times m)$, а $q(t)$, $p(x)$—соответственно $(m\times\alpha)$- и $(\alpha\times m)$-матрицы. Такие ядра естественно назвать почти разностными. Оказалось, что для построения резольвентного ядра можно воспользоваться алгоритмом, основанным на аналоге известной формулы В. В. Соболева ([2]).

В работе ([3]) было показано, что к интегральному оператору на всей оси с двойным почти разностным ядром применим классический метод исследования на нормальную разрешимость.

В данной работе продолжается изучение операторов с почти разностным ядром. Обобщаются известные результаты И. Б. Симоненко ([4]), И. И. Комяка ([5]) об операторах с составными разностными ядрами, а также результат И. И. Комяка ([6]) для уравнения с сопряжением. Перенесены на случай оператора с почти разностным ядром и основные результаты Л. А. Сахновича ([7,8]), относящиеся к построению оператора, обратного к общему оператору с разностным ядром.

1°. Рассмотрим уравнение

$$(\lambda\mathcal{J}-\mathcal{K})y=\lambda y(x)-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}K(x,t)y(t)dt=f(x),\ -\infty<x<\infty, \qquad (1)$$

где

$$K(x,t)=\begin{cases} K_1(x-t)+\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{0}q_1(t+\tau)p_1(\tau+x)d\tau, & 0<x,\ t<\infty\\ K_2(x-t)+\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{0}q_2(t+\tau)p_2(\tau+x)d\tau, & -\infty<x\leqslant 0,\ 0<t<\infty\\ K_3(x-t)+\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int\limits_{0}^{\infty}q_3(t+\tau)p_3(\tau+x)d\tau, & -\infty<x,\ t\leqslant 0\\ K_4(x-t)+\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int\limits_{0}^{\infty}q_4(t+\tau)p_4(\tau+x)d\tau, & 0<x<\infty,\ -\infty<t\leqslant 0\end{cases} \qquad (2)$$

$K_i(x)$, $q_i(x)$, $p_i(x)$ — соответственно $(m\times m)$-, $(m\times \alpha_i)$-, $(\alpha_i\times m)$-матрицы с элементами из $L_1(-\infty, \infty)$, $i=1, \ldots, 4$; λ — комплексный параметр. При этих условиях оператор $\lambda\mathcal{J}-\mathcal{K}$ естественно расматривать в классе $E_{(m\times 1)}$, введенном в работе [9].

Уравнение (1) с ядром (2) в случае нулевых матриц q_i, p_i, — парное уравнение с двойным ядром, — было рассмотрено ранее (см. [10], с. 81).

Применением преобразования Фурье и формулы Сохоцкого—Племеля приходим к соотношению (знаки $\wedge$ и $\vee$ соответствуют прямому и обратному преобразованию Фурье)

$$\left[\lambda\mathcal{J}-\frac{1}{2}\widehat{K}_1(\xi)-\frac{1}{2}\widehat{K}_3(\xi)-\frac{1}{2}\check{q}_1(\xi)\widehat{p}_1(\xi)-\frac{1}{2}\check{q}_3(\xi)\widehat{p}_3(\xi)\right]\widehat{y}(\xi)+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\widehat{K}_3(\xi)-\widehat{K}_1(\xi)-\check{q}_1(\xi)\widehat{p}_1(\xi)-\check{q}_3(\xi)\widehat{p}_3(\xi)}{\eta-\xi}\widehat{y}(\eta)d\eta+T\widehat{y}=\widehat{f}(\xi), \tag{3}$$

где T — вполне непрерывный оператор, и поэтому получаем (см. [10], с. 64, 65) следующие условия нетеровости оператора (1)—(2):

$$\det[\lambda\mathcal{J}-\widehat{K}_i(\xi)-\check{q}_i(\xi)\widehat{p}_i(\xi)]\neq 0, \qquad i=1, 3.$$

Индекс оператора $\lambda\mathcal{J}-\mathcal{K}$ вычисляется по формуле*

$$\varkappa=\operatorname{ind}\frac{\det[\lambda\mathcal{J}-\widehat{K}_3(\xi)-\check{q}_3(\xi)\widehat{p}_3(\xi)]}{\det[\lambda\mathcal{J}-\widehat{K}_1(\xi)-\check{q}_1(\xi)\widehat{p}_1(\xi)]} \tag{4}$$

Замечание. Рассмотренным выше методом легко обобщаются на случай операторов с почти разностным ядром и результаты И. И. Комяка [5,6] об условиях нетеровости и индексе операторов со многими разностными ядрами и операторов с разностными ядрами и с сопряжением.

2°. Рассмотрим ограниченный линейный оператор

$$Sf=\frac{d}{dx}\int_0^{\omega}f(t)s(x, t)dt, \quad 0<\omega<+\infty \tag{5}$$

в пространстве $L_m^2(0, \omega)$ вектор-функций $f(x)=[f_1(x), \ldots, f_m(x)]$ с нормой $\|f\|=\sqrt{\sum_{k=1}^{m}\int_0^{\omega}|f_k(x)|^2dx}$. Будем считать, что

$$s(x, t)=s_0(x-t)+\int_{-\infty}^{0}q(t+\tau)p(\tau+x)d\tau, \tag{6}$$

где $s_0(x)$ — $(m\times m)$-, $q(x)$ — $(m\times\alpha)$-, $p(x)$ — $(\alpha\times m)$-матрицы, строки которых принадлежат, соответственно, $L_m^2(-\omega, \omega)$, $L_\alpha^2(0, \omega)$, $L_m^2(0, \omega)$; строки матрицы $\int_{-\infty}^{0}q(t+\tau)p(\tau+x)d\tau$ при каждом фиксированном значении переменной x или t по другой из них принадлежат $L_m^2(0, \omega)$,

* При $\lambda=0$ необходимо накладывать естественные условия на бесконечности (см. [10]).

элементы матрицы $q(x)p(x)$ стремятся к 0 при $x\to\infty$, а $\int\limits_0^{\omega} f(t)\,s(x,t)dt$ абсолютно непрерывен на $[0,\omega]$ при $f(x)\in L_m^2(0,\omega)$.

Из теоремы 1.1 ([7]) следует, что оператор S вида (5) с ядром (6) является наиболее общим линейным ограниченным оператором с почти разностным ядром в $L_m^2(0,\omega)$.

Непосредственным вычислением можно убедиться, что справедлива

Теорема 1. *Для любого ограниченного оператора S с почти разностным ядром имеет место равенство*

$$(A_0S-SA_0^*)f=i\int\limits_0^{\omega} f(t)[M(x)+N(t)+\int\limits_0^{t} q(\tau)d\tau\cdot p(x)]dt, \text{ где}$$

$$A_0f=i\int\limits_0^{x} f(t)dt,\quad A_0^*f=-i\int\limits_x^{\omega} f(t)dt \quad \text{и}$$

$$M(x)=s_0(x)+\int\limits_{-\infty}^{0} q(\tau)p(\tau+x)d\tau,\quad N(x)=-s_0(-x)-\int\limits_{-\infty}^{0} q(x+\tau)p(\tau)d\tau.$$

Из теоремы 1 вытекает

Следствие. Если оператор S имеет ограниченный обратный T, то $(TA_0-A_0^*T)f=i\int\limits_0^{\omega} f(t)Q(x,t)dt$, где

$$Q(x,t)=M_1^*(t)N_1(x)+M_2^*(t)N_2(x)+M_3^*(t)N_3(x), \tag{7}$$

а $(m\times m)$-матрицы M_i, N_i, $i=1,2$, и $(\alpha\times m)$-матрицы M_3, N_3 удовлетворяют соотношениям

$$\begin{gathered} S^*M_1=E_m,\quad S^*M_2=N^*,\quad S^*M_3=\int\limits_0^{t} q^*(\tau)d\tau, \\ SN_1=M,\quad SN_2=E_m,\quad SN_3=p. \end{gathered} \tag{8}$$

Из теоремы 1, следствия и теоремы 1.3 ([7]) вытекает

Теорема 2. *Если оператор S с почти разностным ядром ограничен вместе с обратным и существуют матрицы M_i, N_i, $i=1,2,3$, строки которых принадлежат $L_m^2(0,\omega)$, удовлетворяющие соотношениям* (8), *то для оператора $T=S^{-1}$ справедливо представление*

$$Tf=\frac{d}{dx}\int\limits_0^{\omega} f(t)\frac{\partial}{\partial t}\Phi(x,t)dt, \tag{9}$$

где

$$\Phi(x,t)=\frac{1}{2}\int\limits_{x+t}^{2\omega-|x-t|} Q\left(\frac{s+x-t}{2},\frac{s-x+t}{2}\right)ds, \tag{10}$$

а матрица-функция $Q(x,t)$ определяется соотношением (7).

Используя теорему 2, можно доказать утверждение, обратное теореме 1.

Теорема 3. *Если ограниченный оператор S, действующий в $L^2_m(0, \omega)$, удовлетворяет при некоторых матрицах $M(x)$, $N(x)$, $P(x)$, $R(x)(R(0)=0)$, строки которых принадлежат, соответственно, $L^2_m(0, \omega)$, $L^2_m(0, \omega)$, $L^2_m(0, \omega)$, $L^2_n(0, \omega)$, соотношению*

$$(A_0 S - S A_0^*) f = i \int_0^{\omega} f(t) [M(x) + N(t) + R(t) P(x)] dt, \tag{11}$$

то S является оператором с почти разностным ядром.

Доказательство. Как и в ([7]), рассмотрим оператор $S_1 = USU$, где U—оператор инволюции ($Uf = \overline{f(\omega - x)}$). Из (11) следует, что

$$(S_1 A_0 - A_0^* S_1) f = i \int_0^{\omega} f(t) [\overline{M(\omega - x)} + \overline{N(\omega - t)} + \overline{R(\omega - t)}\, \overline{P(\omega - t)}] dt.$$

По теореме 2 оператор S_1 имеет вид (9), где

$$\Phi(x, t) = \frac{1}{2} \int_{x+t}^{2\omega - |x-t|} \Bigg[\overline{M\left(\omega - \frac{s+x-t}{2}\right)} + \overline{N\left(\omega - \frac{s-x+t}{2}\right)} +$$

$$+ \overline{R\left(\omega - \frac{s-x+t}{2}\right)}\, \overline{P\left(\omega - \frac{s+x-t}{2}\right)} \Bigg] ds.$$

Оператор S можно теперь восстановить по формуле

$$Sf = US_1Uf = U\left\{\frac{d}{dx}\int_0^{\omega} \overline{f(\omega - t)} \frac{\partial}{\partial t} \Phi(x, t) dt\right\} = \frac{d}{dx}\int_0^{\omega} f(t) s(x, t) dt,$$

где

$$s(x, t) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_{2\omega - x - t}^{2\omega - |x-t|} \Bigg[M\left(\omega - \frac{s-x+t}{2}\right) + N\left(\omega - \frac{s+x-t}{2}\right) +$$

$$+ R\left(\omega - \frac{s+x-t}{2}\right) P\left(\omega - \frac{s-x+t}{2}\right) \Bigg] ds.$$

После несложных преобразований получим

$$s(x, t) = \begin{cases} [M(x-t) - \int_{-\infty}^{0} R'(\tau) P(\tau + x - t) d\tau] + \int_{-\infty}^{0} R'(t+\tau) P(\tau + x) d\tau, & x > t \\ [-N(t-x) - \int_{-\infty}^{0} R'(t - x + \tau) P(\tau) d\tau] + \int_{-\infty}^{0} R'(t+\tau) P(\tau + x) d\tau, & x < t \end{cases} \tag{12}$$

и, следовательно, ядро $s(x, t)$ является почти разностным.

Удается доказать справедливость формул (32), (34)—(40) из ([8]) для оператора S с почти разностным ядром (матрица-функция $Q(x, t)$ в рассматриваемом нами случае определена соотношением ([7])), а значит и следующей теоремы (см. ([8])).

Теорема 4. *Пусть оператор S, определенный формулой (5), ограничен в пространстве $L^2_m(0, \omega)$ и существуют матрицы-функции $N_k(x)$, $M_k(x)$, $k = 1, 2, 3$ с элементами из $L^2(0, \omega)$, удовлетворяющие соотношениям (8) и на множестве дважды дифференцируе-*

мых функций $W_m^{(2)}=\{\varphi(x)=[\varphi_1(x),\ldots,\varphi_m(x)]\mid\varphi''(x)\in L_m^{(2)}(0,\omega)\}$ *определен оператор*

$$T\varphi=\int_0^\omega\varphi'(t)Q(x,t)dt+\varphi(0)N_2(x)-\varphi'(0)\int_x^\omega N_2(u)du-$$

$$-\int_x^\omega\int_{t-x}^\omega\varphi''(x-t+u)Q(t,u)dtdu,\tag{13}$$

где $Q(x,t)$ *удовлетворяет соотношению* (7). *Тогда оператор* T *является правым обратным для оператора* S *на* $W_m^{(2)}$, *т. е.*

$$ST\varphi=\varphi,\quad\varphi\in W_m^{(2)}.$$

Институт математики Академии наук
Армянской ССР
Харьковское культурно-
просветительное училище

Հ. Բ. ՆԵՐՍԻՍՅԱՆ, Ն. Ա. ՉԵՐՆՅԱՎՍԿԱՅԱ

Համարյա տարբերական կորիզով ինտեգրալ օպերատորների շրջման մասին

Աշխատանքում դիտարկվում են ինտեգրալ օպերատորներ, որոնց կորիզները բավարարում են (*) հավասարմանը։ 1°-ում բացահայտվում են նորմալ լուծելիության պայմանները, իսկ 2°-ում կառուցվում է հակադարձ օպերատորը։ Արդյունքները ընդհանրացնում են Վ. Բ. Սիմոնենկոյի, Լ. Ա. Սախնովիչի և այլոց (3–8) աշխատանքները։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *T. Kailath, L. Ljung, M. Morf,* Topics in Funct. Anal. Advances in Math. Suppl. Studies, 3, 1978. [2] *В. В. Соболев,* Перенос лучистой энергии в атмосферах звезд и планет, Гостехиздат, М., 1956. [3] *А. Б. Нерсесян,* Изв. АН Арм ССР. Математика, т. 17, № 6 (1982). [4] *И. Б. Симоненко,* Изв. вузов. Математика, № 2, 1959. [5] *И. И. Комяк,* ДАН СССР, т. 179, № 2 (1968). [6] *И. И. Комяк,* ДАН БССР, т. 13, № 3 (1969). [7] *Л. А. Сахнович,* УМН, т. 35, № 4 (214) (1980). [8] *Л. А. Сахнович,* Укр. мат. журн., т. 32, № 1 (1980). [9] *И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн,* УМН, т. 13, № 2 (80) (1958). [10] *Ф. Д. Гахов, Ю. И. Черский,* Уравнение типа свертки, Наука, М., 1978.