ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
LXXIX 1984 1

УДК 517.544

МАТЕМАТИКА

В. С. Захарян, С. В. Мадоян

О граничных значениях функций класса $N_\alpha(-1<\alpha<0)$ М. М. Джрбашяна

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 3/III 1983)

1. Класс $N_\alpha(-1<\alpha<0)$ М. М. Джрбашяна [1,2] совпадает с множеством функций $F(z)$, допускающих представление вида

$$F(z)=cz^\lambda \frac{B_\alpha(z;\ a_\mu)}{B_\alpha(z;\ b_\nu)} \exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} S_\alpha(e^{-i\theta}z)\,d\psi(\theta)\right\}, \tag{1}$$

где c—постоянная, λ—целое число,

$$S_\alpha(z)=\Gamma(1+\alpha)\left\{\frac{2}{(1-z)^{1+\alpha}}-1\right\}, \tag{2}$$

а $\psi(\theta)$—произвольная вещественная функция ограниченной вариации на сегменте $[0, 2\pi]$.

В представлении (1) функции $B_\alpha(z;\ a_\mu)$ и $B_\alpha(z;\ b_\nu)$, сходящиеся в $|z|<1$, произведения М. М. Джрбашяна с нулями $\{a_\mu\}_1^\infty$ и $\{b_\nu\}_1^\infty$ соответственно.

Обозначим через $\{B\}$ систему всех множеств, измеримых по Борелю и лежащих в сегменте $[0, 2\pi]$.

Будем называть мерой μ всякую неотрицательную вполне аддитивную функцию множеств, определенную на $\{B\}$ и нормированную. Будем говорить, что мера μ сосредоточена на множестве B и писать $\mu -\!\!< B$, если $\mu(B)=1$.

Множество E (см. например [3]), измеримое по Борелю, имеет положительную γ-емкость $(0<\gamma<1)$, если найдется такая мера $\mu -\!\!< E$, для которой функция

$$V(x;\ r)=\int_0^{2\pi}\frac{1}{|e^{it}-re^{ix}|^\gamma}\,d\mu \tag{3}$$

остается равномерно ограниченной по x, при $r\to 1$. Тогда напишем, что $\mathrm{Cap}_\gamma E>0$.

Если такой меры $\mu -\!\!< E$, для которой это условие выполнено, не существует, то говорят, что E имеет γ-емкость, равную нулю, и пишут $\mathrm{Cap}_\gamma E=0$.

Замечание. Если множество E типа G_δ и $\mathrm{Cap}_\gamma E=0$, то существует мера $\mu -\!\!< E$, такая что $V(x;\ r)\to\infty$ равномерно при $r\to 1$, когда $x\in E$, и $V(x;\ r)<\infty$ при $x\notin E$ (см. например [4], с. 223).

Если $-1<\alpha<0$, то класс N_α М. М. Джрбашяна содержится в классе функций ограниченного вида и следующие две теоремы характеризуют граничные свойства функций этих классов ((5), теоремы 2 и 3, при $\omega(x)=(1-x)^\alpha$).

Теорема A. *Если $F(z)\in N_\alpha(-1<\alpha<0)$, то предел*

$$F(e^{i\theta})=\lim_{r\to 1-0} F(re^{i\theta})$$

существует для любого $\theta\in[0, 2\pi]$, кроме, быть может, некоторого множества $E\subset[0, 2\pi]$, $(1+\alpha)$-емкость которого равна нулю.

Теорема B. *Пусть $F(z)\in N_\alpha(-1<\alpha<0)$ и $E\subset[0, 2\pi]$ любое множество с положительной $(1+\alpha)$-емкостью.*

Пусть для меры $\mu-<E$, функция $V(x; r)$ остается равномерно ограниченной по x при $r\to 1$, тогда для граничных значений $F(e^{i\theta})$ функции $F(z)$ выполняются условия

$$\int_E |\log|F(e^{i\theta})||d\mu(\theta)<\infty.$$

Приведенное построение функций классов N_α показывают точность этих теорем.

2. Теорема 1. *Пусть для измеримого по Борелю множества E имеем $\mathrm{Cap}_{1+\alpha}E=0$ $(-1<\alpha<0)$ Существует функция из класса $N_\alpha(-1<\alpha<0)$, радиальные предельные значения которой на множестве E равны нулю.*

Доказательство. Оценим снизу вещественную часть функции $K_\psi(z)$ для всех $|z|<1$.

Имеем

$$\operatorname{Re} K_\psi(z)=\operatorname{Re}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{d\psi(\theta)}{(1-e^{-i\theta}z)^{1+\alpha}}=$$

$$=\operatorname{Re}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(1-re^{i(\varphi-\theta)})^{1+\alpha}d\psi(\theta)}{|1-re^{i(\varphi-\theta)}|^{2(1+\alpha)}}\geqslant$$

$$\geqslant\delta_\alpha\int_0^{2\pi}\frac{d\psi(\theta)}{|1-re^{i(\varphi-\theta)}|^{2+\alpha}}\geqslant\frac{\delta_\alpha}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{d\psi(\theta)}{|1-re^{i(\varphi-\theta)}|^{1+\alpha}},\tag{4}$$

где δ_α удовлетворяет неравенству $\cos(1+\alpha)\frac{\pi}{2}\leqslant\delta_\alpha\leqslant 1$. Так как $\mathrm{Cap}_{1+\alpha}E=0$, то согласно замечанию существует распределение $\mu-<E$ такое, что

$$\lim_{r\to 1}\int_E\frac{d\mu(\theta)}{|1-re^{i(\varphi-\theta)}|^{1+\alpha}}=+\infty$$

равномерно по φ на множестве E.

Если принять за функцию $\psi(\theta)$ это распределение на E и построить функцию

$$F(z)=\exp\{-K_+(z)\},$$

то легко усмотреть согласно неравенству (4), что она будет требуемой функцией из класса N_α.

Учитывая, что функции $\dfrac{1}{F(z)}$ и $E(z)$ одновременно принадлежат классу $N_\alpha(-1<\alpha<0)$, и приняв во внимание теоремы А и В, получим следующую теорему.

Теорема 2. *Для того чтобы существовала функция* $F(z)$ *из класса* $N_\alpha(-1<\alpha<0)$ *М. М. Джрбашяна, для которой на измеримом по Борелю множестве* E *на окружности*

1) *не существовали радиальные предельные значения или*

2) *радиальные предельные значения равнялись нулю,*

необходимо и достаточно, чтобы $\mathrm{Cap}_{1+\alpha}E=0$.

Ереванский политехнический
институт им. К. Маркса

Վ. Ս. ԶԱՔԱՐՅԱՆ, Ս. Վ. ՄԱԴՈՅԱՆ

Մ. Մ. Ջրբաշյանի դասի $N_\alpha(-1<\alpha<0)$ եզրային արժեքների մասին

Աշխատանքում կառուցված են Մ. Մ. Ջրբաշյանի $N_\alpha(-1<\alpha<0)$ *դասի պատկանող երկու ֆունկցիա, որոնցից առաջինը նախապես տրված զրոյի հավասար* $(1+\alpha)$ *ունակությամբ բազմության վրա չունի եզրային արժեքներ, իսկ երկրորդը ունի զրոյի հավասար եզրային արժեքներ նույն բազմության վրա։*

Ստացված արդյունքները ապացուցում են այդ դասի ֆունկցիաների եզրային արժեքների համար նախկինում ստացված արդյունքների ճշգրտությունը։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *М. М. Джрбашян*, ДАН СССР, т. 157, № 5(1964). [2] *М. М .Джрбашян*, Интегральные преобразования и представление функций в комплексной области, Наука, М., 1966. [3] *Н. К. Бари*, Тригонометрические ряды, Физматгиз, М., 1961. [4] *Н. С. Ландкоф*, Основы современной теории потенциала, Наука, М., 1966. [5] *М. М. Джрбашян, В. С. Захарян*, Изв. АН СССР. Сер. мат., т. 34(1970).