ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXIX 1984 1

УДК 519.2

МАТЕМАТИКА

Н. М. Бабаян

Об асимптотическом поведении ошибки прогноза стационарной сингулярной последовательности

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. В. Амбарцумяном 21/II 1983)

В работе рассматривается задача линейного прогнозирования ([1]) стационарного в широком смысле случайного процесса с дискретным временем в сингулярном случае.

Исследуется асимптотическое поведение ошибки наилучшего линейного прогноза, когда длина интервала, по которому ведется прогнозирование, стремится к бесконечности. Установлена связь между экспоненциальной скоростью убывания к нулю ошибки прогноза и емкостью (трансфинитным диаметром) множества всех тех точек, в которых спектральная плотность процесса строго положительна.

1. Итак, пусть $\{X_n\}_{-\infty}^{\infty}$—стационарный в широком смысле случайный процесс с дискретным временем, т. е. $\{X_n\}$—последовательность случайных величин с нулевыми средними и корреляционной функцией $K(n, m)=MX_n\overline{X_m}=K(n-m)$, зависящей лишь от разности $n-m$ (предполагается, конечно, что $M|X_n|^2<\infty$).

Обозначим через H линейную оболочку величин X_n, $-\infty<n<\infty$, замкнутую относительно сходимости в среднем квадратичном. Введением для величин X и Y из H скалярного произведения $(X, Y)=$ $=MX\overline{Y}$ H превращается в гильбертово пространство.

Известно ([1]), что корреляционная функция стационарного в широком смысле дискретного процесса имеет спектральное представление $K(n)=\int e^{in\lambda}F(d\lambda)$ (здесь и далее, где не указаны пределы интегрирования, интеграл берется по отрезку $(-\pi, \pi]$), где $F(d\lambda)$—спектральная мера процесса — имеет ограниченную вариацию, $\int F(d\lambda)<$ $<+\infty$.

Мы предполагаем, что процесс X_n имеет спектральную плотность (с. п.) $f(\lambda)$, т. е. $K(n)=\int e^{in\lambda}f(\lambda)d\lambda$.

Задача линейного прогнозирования состоит в следующем. Предположим, что процесс наблюдался от момента времени $-n$ до момента -1, т. е. известны его значения $X_{-n}, X_{-n+1}, \ldots, X_{-1}$, и требуется на основе знания этих величин предсказать его значение в момент времени 0, причем способ предсказания должен быть линейным. Последнее означает, что величина $\hat{X}_0(n)$, являющаяся прогнозом неизвестного значения X_0, должна принадлежать пространству H_{-n}^{-1}— линейной оболочке величин X_k, $-n\leq k\leq -1$. Прогноз считается наилучшим, если его ошибка σ_n: $\sigma_n^2=\|X_0-\hat{X}_0(n)\|^2=M|X_0-\hat{X}_0(n)|^2$

является минимальной $\sigma_n^2 = \min_{X \in H_{-n}^{-1}} \|X_0 - X\|^2 = \min_{c_k} \left\| X_0 - \sum_{k=1}^{n} c_k X_{-k} \right\|^2.$

В дальнейшем наилучший линейный прогноз будем называть просто прогнозом и его ошибку обозначать через σ_n.

Наряду с прогнозом по конечному отрезку прошлого будем рассматривать прогноз по всему прошлому, т. е. по величинам X_k, $k<0$. Его ошибка σ_∞ определяется так: $\sigma_\infty^2 = \min_{X \in H_{-\infty}^{-1}} \|X_0 - X\|^2$,

где $H_{-\infty}^{-1}$ — замкнутая линейная оболочка величин X_k, $k<0$.

Известно [1], что $\sigma_\infty^2 = 2\pi \exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int \ln f(\lambda) d\lambda\right\}$,

и в зависимости от того, сходится интеграл под знаком экспоненты или он равен $-\infty$ (к $+\infty$ он не может расходиться ввиду элементарного неравенства $\ln f \leqslant f$ и суммируемости f), ошибка прогноза σ_∞ по всему прошлому будет равна нулю или больше нуля.

В первом случае процесс называется сингулярным, во втором — регулярным.

Положим $\delta_n = \sigma_n^2 - \sigma_\infty^2$. Очевидно $\delta_n \geqslant 0$ и $\delta_n \to 0$ при $n \to \infty$. Нас интересует скорость стремления к нулю величины δ_n. Асимптотическое при n, стремящемся к бесконечности, поведение величины δ_n в случае регулярного процесса достаточно хорошо изучено. В частности, Гренандер и Розенблатт [2] нашли необходимое и достаточное условие для того, чтобы δ_n убывала по крайней мере экспоненциально —

$$\delta_n \leqslant C q^n, \quad 0<q<1, \quad C>0.$$

Это условие заключается в том, что с. п. $f(\lambda)$ должна почти всюду на $(-\pi, \pi]$ совпадать с функцией, аналитической при вещественных λ и не имеющей вещественных нулей.

Бакстер [3] нашел некоторые достаточные, а И. А. Ибрагимов [4] необходимые и достаточные условия, которые, будучи наложены на с. п. $f(\lambda)$, гарантируют степенное убывание δ_n к нулю, $\delta_n = O(n^{-\alpha})$, $\alpha>1$ при n, стремящемся к бесконечности.

Все эти результаты относятся к регулярному случаю. Что же касается сингулярного случая, то нам известна лишь одна работа Розенблатта [5], содержащая следующий результат: если с. п. $f(\lambda)$ непрерывна и строго положительна на отрезке $\left[\frac{\pi}{2}-\alpha, \frac{\pi}{2}+\alpha\right]$ и равна нулю вне него, то

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\sigma_n} = \sin\frac{\alpha}{2} \qquad (1)$$

(напомним, что в сингулярном случае $\sigma_\infty = 0$).

Таким образом, если в соотношении (1) $\alpha<\pi$, то ошибка прогноза σ_n убывает к нулю с экспоненциальной скоростью.

2. Прежде чем сформулировать наши результаты (теоремы 1, 2), коротко напомним определение емкости или трансфинитного диаметра ограниченного множества на комплексной плоскости.

Пусть F — ограниченное замкнутое множество на плоскости комплексного переменного z, $T_n(z, F)=z^n+a_1^{(n)}z^{n-1}+\ldots$ — многочлен Чебышева ([6]), наименее уклоняющийся от нуля в равномерной метрике на множестве F и $m_n(F)=\max\limits_{z\in F}|T_n(z, F)|$.

Тогда ([6]) существует предел $\tau(F)$ последовательности чисел $\sqrt[n]{m_n(F)}$, который называется емкостью или трансфинитным диаметром множества F: $\tau(F)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{m_n(F)}$.

Отметим, что емкость окружности равна его радиусу ([6]), а емкость дуги длиной 2α единичной окружности равна $\sin\frac{\alpha}{2}$. ([5]).

Для произвольного (не обязательно замкнутого) ограниченного множества E вводятся ([7]) внутренняя емкость $\tau_*(E)$: $\tau_*(E)=\sup\limits_{F\subset E}\tau(F)$, где точная верхняя грань берется по всем замкнутым подмножествам F множества E, и внешняя емкость $\tau^*(E)$: $\tau^*(E)=\tau(\bar{E})$, где $\bar{E}$ обозначает замыкание E.

Очевидно $\tau_*(E)\leqslant\tau^*(E)$, и если в этом неравенстве имеет место равенство, то множество E будем называть τ-измеримым.

Обозначим через E спектр с. п. $f(\lambda)$, т. е. множество точек, в которых с. п. $f(\lambda)$ строго положительна, причем в дальнейшем мы полагаем, что с. п. $f(\lambda)$ задана на единичной окружности C и, следовательно, E является подмножеством C.

Теорема 1. *Имеют место следующие утверждения:*

а) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\sigma_n}\leqslant\tau^*(E)$, *т. е. для того чтобы ошибка прогноза* σ_n *убывала по крайней мере экспоненциально, когда n стремится к бесконечности, достаточно, чтобы внешняя емкость спектра с. п.* $f(\lambda)$ *была меньше единицы;*

б) если E является объединением конечного числа дуг единичной окружности, то $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\sigma_n}=\tau(E)$;

в) если E—объединение счетного числа дуг и τ-измеримо, то

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\sigma_n}=\tau(E).$$

Доказательство теоремы опускаем. Отметим только, что оно опирается на одну теорему Мазуркевича, касающуюся роста максимума модуля многочлена при переходе с подмножества на множество ([8,9]).

Следствие. Для того чтобы ошибка прогноза σ_n убывала к нулю с экспоненциальной скоростью, необходимо, чтобы с. п. $f(\lambda)$ обращалась в нуль на множестве положительной меры.

Замечание. Как отмечалось выше, емкость дуги длиной 2α единичной окружности равна $\sin\frac{\alpha}{2}$ ([5]), так что в соотношении (1) Розенблатта в правой части стоит величина емкости спектра с. п. $f(\lambda)$. Таким образом, соотношение (1) является частным случаем утверждения б) теоремы 1 (когда спектр с. п. $f(\lambda)$ состоит всего лишь из одной дуги), причем подчеркнем, что в теореме 1 непрерывности с. п. $f(\lambda)$ не требуется. Прежде чем сформулировать теорему 2 напомним определение точки Лебега.

Пусть E—подмножество единичной окружности C. Точка $z\in E$ называется точкой Лебега множества E, если

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{m(E\cap D_\varepsilon(z))}{2\varepsilon}=1,$$

где $D_\varepsilon(z)$—круг радиуса ε с центром в точке z, а $m(e)$, $e\subset C$, обозначает линейную меру множества e.

Пусть E имеет тот же смысл, что и в теореме 1, а N—множество точек Лебега множества E.

С использованием результатов П. П. Коровкина (7) доказывается

Теорема 2. *Если на окружности C существует такое замкнутое множество F, состоящее из объединения счетного числа дуг, что $E\subset F$ и $\tau(N)=\tau(F)=\tau$, то* $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\sigma_n}=\tau$.

В заключение автор выражает благодарность своему научному руководителю И. А. Ибрагимову за постоянное внимание и помощь в работе.

Ленинградский государственный университет им. А. А. Жданова

Ն. Մ. ԲԱԲԱՅԱՆ

Գուշակման սխալի ասիմպտոտիկ վարքը սինգուլյար ստացիոնար հաջորդականության համար

Աշխատանքում դիտարկվում է գծային գուշակման խնդիրը սինգուլյար ստացիոնար հաջորդականության համար։ Հետազոտվում է գուշակման սխալի ասիմպտոտիկ վարքը, երբ հատվածի երկարությունը, ըստ որի կատարվում է գուշակումը, ձգտում է անվերջության։ Հաստատվում է գուշակման սխալի էքսպոնենցիալ արագությամբ նվազման և հաջորդականության սպեկտրալ խտության սպեկտրի ունակության միջև եղած կապը։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Ю. А. Розанов*, Стационарные случайные процессы, М., Физматгиз, 1963. [2] *U. Grenander, M. Rosenblatt*, Trans. amer. math. soc., v. 76, № 1 (1954). [3] *G Baxter*, Math. scand., v. 10, № 2 (1962). [4] *И. А. Ибрагимов*, Теория вероятности и ее применения, т. 9, № 4 (1964). [5] *M. Rosenblatt*, J. of rational mech. and analysis, v. 6, № 6 (1957) [6] *Г. М. Голузин*. Геометрическая теория функций комплексного переменного, М, Наука, 1966 [7] *П. П. Коровкин*, Уч. зап. Калинингр. гос. пединститута, т. 5 (1958) [8] *S. Mazurkiewicz*, Ann. soc. pol. math., v. 18 (1945). [9] *Я. Л. Геронимус*, Мат. сб., т. 23 (65), № 1 (1948).