

УДК 539.3

МЕХАНИКА

Г. Е. Багдасарян

Динамическая устойчивость сверхпроводящей
цилиндрической оболочки в магнитном поле
нестационарного тока

(Представлено академиком АН Армянской ССР С. А. Амбарцумяном 23/III 1983)

Задачи устойчивости сверхпроводящих цилиндрических оболочек при стационарном токе рассмотрены в работах (1,2). В данной работе рассматривается задача динамической устойчивости сверхпроводящей цилиндрической оболочки, по направлению образующей которой течет нестационарный поверхностный ток. Установлена возможность потери динамической устойчивости невозмущенного состояния. Получены формулы для определения критических частот параметрического резонанса и ширины областей неустойчивости.

1. Пусть круговая бесконечная замкнутая цилиндрическая оболочка постоянной толщины $2h$ и радиуса срединной поверхности R отнесена к триортогональной системе координат α, β, γ так, что координатные линии α и β совпадают с линиями кривизны срединной поверхности, откладываемыми соответственно вдоль образующей и по дуге.

Считается, что оболочка изготовлена из упругого изотропного материала и покрыта тонким слоем сверхпроводящего сплава (например Nb_3Sn), толщина которого намного больше глубины проникновения магнитного поля в сверхпроводник (обычно порядка 10^{-6} см). Материал оболочки характеризуется модулем упругости E , коэффициентом Пуассона ν и плотностью ρ . Электромагнитные свойства среды, окружающей оболочку, эквивалентны свойствам вакуума. Принимается, что влиянием токов смещения на возмущенное магнитное поле можно пренебречь. В отношении тонкой оболочки считается справедливой гипотеза недеформируемых нормалей.

Пусть по поверхности оболочки вдоль оси α транспортируется переменный электрический ток силы $J=J(t)$, вектор линейной плотности которой равен

$$\vec{I} = \frac{J(t)}{2\pi R} \vec{e}_\alpha = I(t) \vec{e}_\alpha. \quad (1.1)$$

Невозмущенное электрическое $\vec{E}(E_\alpha, E_\beta, E_\gamma)$ и магнитное $\vec{H}(H_\alpha, H_\beta, H_\gamma)$ поля, возникающие в окружающем пространстве от тока (1.1), вследствие того, что магнитное поле не проникает в толщу сверхпроводника, существуют лишь в области $\gamma > h$. Из условий за-

дачи следует, что $H_a = H_T = E_z = E_T = 0$ во всем пространстве. А из оставшихся отличных от нуля компонент электромагнитного поля H_β и E_a в дальнейшем используется только H_β , а точнее его значение H_β^* на поверхности оболочки. Указанное значение H_β^* , необходимое для определения поверхностного давления, вызванного электромагнитным полем, согласно поверхностному условию $\vec{n}_0 \times \vec{H} = 4\pi \vec{I}/c$ ($\vec{n}_0$ — единичный вектор внешней нормали к недеформированной поверхности оболочки), определяется формулой

$$H_\beta^* = \frac{4\pi}{c} I(t). \quad (1.2)$$

Вследствие того, что магнитное поле не проникает в область, занимаемую оболочкой, на поверхности оболочки компоненты тензора напряжений Максвелла претерпевают разрыв. Этим разрывом обусловлено появление магнитного давления $\vec{P}_0$, определяемого формулой ⁽³⁾

$$\vec{P}_0 = -\frac{H^2}{8\pi} \vec{n}_0 = -\frac{2\pi}{c^2} I^2(t) \vec{n}_0. \quad (1.3)$$

Под действием нагрузки $\vec{P}_0$ в оболочке устанавливается начальное невозмущенное состояние, характеризующееся усилением

$$T_2^0 = -\frac{2\pi R}{c^2} I^2(t). \quad (1.4)$$

Характеристики возмущенного движения должны удовлетворять нелинейным уравнениям и краевым условиям на деформированной поверхности оболочки. При малых возмущениях эти уравнения и граничные условия аналогично работам ^(4,5) линеаризуются. Используя известные соотношения гипотезы Кирхгофа—Лява, приходим к линейным уравнениям и граничным условиям возмущенного состояния, полученным в работе ⁽⁶⁾. В дальнейшем будем рассматривать случай, когда возмущения не зависят от координаты z . В этом случае линеаризованные уравнения возмущенного движения имеют вид ⁽⁶⁾

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \beta^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial \beta} - \frac{h^2}{3R} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} + \frac{w}{R^2} \right) + \frac{(H_\beta^*)^2}{4\pi} \frac{1-v^2}{2Eh} \frac{\partial w}{\partial \beta} = \frac{\rho(1-v^2)}{E} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \quad (1.5)$$

$$D \left[\frac{\partial^4 w}{\partial \beta^4} + \frac{3}{Rh^2} \left(\frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{w}{R} \right) + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} \right] + 2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - T_2^0 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} + \frac{w}{R^2} \right) - \frac{h(H_\beta^*)^2}{4\pi} \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} + \frac{H_\beta^* h_\beta^*}{4\pi} = 0, \quad D = \frac{2Eh^3}{3(1-v^2)}.$$

Рассматривая систему уравнений (1.5), замечаем, что она не замкнута. В нее, кроме перемещений v и w срединной поверхности оболочки, входит неизвестное граничное значение тангенциальной составляющей индуцированного магнитного поля h_β^* на поверхности оболочки. Его определяем, решая уравнения Максвелла для возмущенного состояния

$$\operatorname{rot} \vec{h} = 0, \quad \operatorname{div} \vec{h} = 0, \quad (1.6)$$

при следующем поверхностном условии ⁽⁶⁾

$$h_\gamma|_{\gamma=h} = H_\beta^+ \frac{\partial w}{\partial \beta}. \quad (1.7)$$

2. Для определения возмущенного магнитного поля $\vec{h}$ введем потенциальную функцию φ посредством

$$\vec{h} = \operatorname{grad} \varphi. \quad (2.1)$$

Тогда задача определения $\vec{h}$ во внешней области согласно (1.6), (1.7) и (1.2) приводится к решению следующей внешней задачи Неймана для круга ($\gamma > h$)

$$\Delta \varphi = \frac{1}{R+\gamma} \frac{\partial}{\partial \gamma} \left[(R+\gamma) \frac{\partial \varphi}{\partial \gamma} \right] + \frac{R^2}{(R+\gamma)^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \beta^2} = 0, \quad (2.2)$$

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial \gamma} \right|_{\gamma=h} = - \frac{4\pi}{c} I(t) \frac{\partial w}{\partial \beta}.$$

Решение задачи (2.2) представляется посредством интеграла Дини ⁽⁷⁾. Из этого решения в силу (2.1) для h_β^+ найдем

$$h_\beta^+ = - \frac{2I(t)}{cR} \int_0^{2\pi} \frac{\sin(\theta-\xi)}{1-\cos(\theta-\xi)} \frac{\partial w}{\partial \xi} d\xi, \quad \theta = \frac{\beta}{R}. \quad (2.3)$$

Подставляя (1.2), (1.4) и (2.3) в систему (1.5) и пренебрегая влиянием тангенциальных сил инерции, рассматриваемую задачу динамической устойчивости можно свести к исследованию следующего интегро-дифференциального уравнения с переменными коэффициентами:

$$\begin{aligned} & \frac{D}{R^4} \left(\frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + w \right) + 2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \\ & + \frac{2\pi I^2(t)}{Rc^2} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - w + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sin(\theta-\xi)}{1-\cos(\theta-\xi)} \frac{\partial w}{\partial \xi} d\xi \right] = 0. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Решения уравнения (2.4) должны удовлетворять условию замкнутости по координате $\theta = \beta/R$.

3. Представляя решение уравнения (2.4) в виде $w = f_n(t) \cos n\theta$ ($n = 2, 3, \dots$), удовлетворим условию замкнутости, а для определения неизвестных функций $f_n(t)$ из (2.4) получим дифференциальные уравнения

$$\frac{d^2 f_n}{dt^2} + \Omega_n [1 - 2\mu_n(t)] f_n(t) = 0, \quad (3.1)$$

где Ω_n — частоты собственных поперечных колебаний оболочки в от-

существование электрического тока, $\Omega_{0n} = \frac{D(n^2-1)^2}{2\rho h R^4}$, $\mu_n(t) = \frac{2\pi R^2}{D(n+1)^2} \frac{I^2(t)}{c^2}$.

В качестве примера рассмотрим случай, когда по образующим цилиндра течет гармонический электрический ток с вектором линейной плотности $\vec{I}(t) = (I_0 + I_1 \cos \omega t) \vec{e}_z$. Тогда уравнения (3.1) принимают вид

$$\frac{d^2 f_n}{dt^2} + \Omega_n^2 (1 - 2\mu_{1n} \cos \omega t - 2\mu_{2n} \cos 2\omega t) f_n = 0, \quad (3.2)$$

$$\Omega_n^2 = \Omega_{0n}^2 - \gamma_n^2 \frac{I_1^2 + 2I_0 I_1}{2c^2}, \quad \gamma_n^2 = \frac{\pi(n-1)^2}{\rho h R}$$

$$\mu_{1n} = \frac{\gamma_n^2}{\Omega_n^2} \frac{I_0 I_1}{c^2}, \quad \mu_{2n} = \frac{\gamma_n^2}{\Omega_n^2} \frac{I_1^2}{4c^2}. \quad (3.3)$$

В (3.3) Ω_n — частоты поперечных колебаний оболочки, несущей стационарный ток; μ_{1n} и μ_{2n} — коэффициенты возбуждения.

Из (3.2) в случае, когда по образующим цилиндра течет постоянный ток ($I_1 = 0$), легко найти критическую величину плотности этого тока $I_{0*} = c \Omega_{0n} (\gamma_n)^{-1}$, при которой цилиндрическая оболочка теряет статическую устойчивость ⁽²⁾.

Уравнение (3.2) имеет периодические коэффициенты и, как известно ^(8,9), при некоторых соотношениях между коэффициентами имеет неограниченно возрастающие решения. Границы областей главного параметрического резонанса согласно ⁽⁹⁾ определяются следующими приближенными формулами:

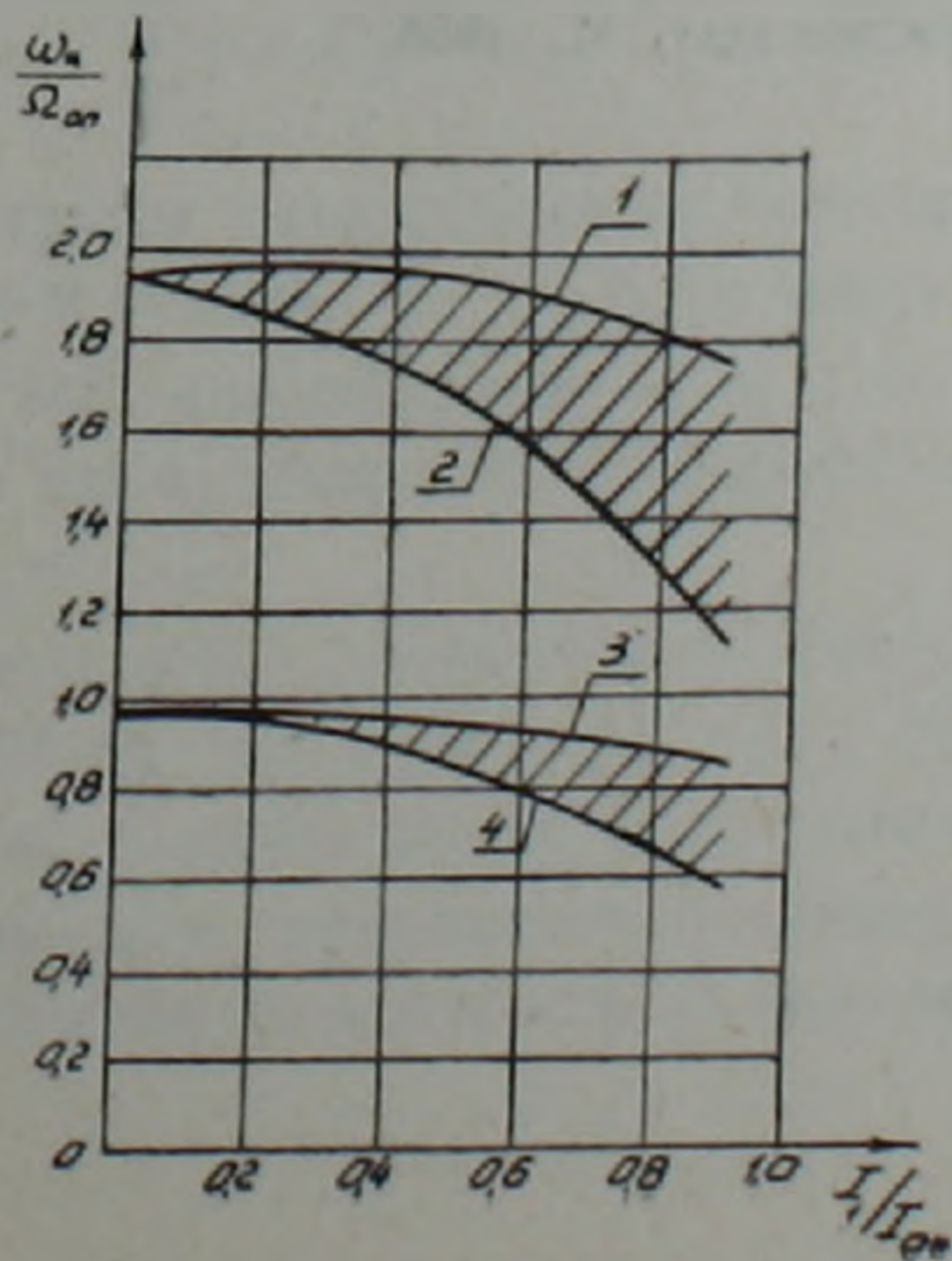
для области, расположенной вблизи частоты $2\Omega_n$,

$$\frac{\omega_*}{\Omega_{0n}} = 2 \sqrt{1 \pm \mu_{1n}} = 2 \left[1 - \left(\frac{I_0}{I_{0*}} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{I_1}{I_{0*}} \right)^2 \pm \frac{I_0}{I_{0*}} \cdot \frac{I_1}{I_{0*}} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (3.4)$$

для области, расположенной вблизи частоты Ω_n ,

$$\frac{\omega_*}{\Omega_{0n}} = \sqrt{1 \pm \mu_{2n}} = \left[1 - \left(\frac{I_0}{I_{0*}} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{I_1}{I_{0*}} \right)^2 \pm \frac{1}{4} \left(\frac{I_1}{I_{0*}} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (3.5)$$

На рисунке показаны области динамической неустойчивости обо-



лочки при $4I_0 = I_{\infty}$. Кривые 1 и 2 построены по уравнению (3.4), а кривые 3 и 4 — по уравнению (3.5). Из рисунка видно, что ширины областей неустойчивости увеличиваются с увеличением амплитуды плотности тока. Формулы (3.4) и (3.5) показывают: а) при достаточно малых значениях I_0 важной является область неустойчивости, расположенная вблизи частоты Ω_n ; б) ширины обеих областей являются монотонно возрастающими функциями величины I_0 .

Институт механики Академии наук
Армянской ССР

Գ. Ն. ԲԱՂԴԱՍԱՐՅԱՆ

Ոչ ստացիոնար հոսանքի մագնիսական դաշտում գտնվող գերհաղորդիչ
գլանային թաղանթի դինամիկական կայունությունը

Դիտված է գերհաղորդիչ գլանային թաղանթի դինամիկական կայունությունը մագնիսական դաշտում, որը ստեղծված է գլանի ծնիշների ուղղությամբ հոսող ոչ ստացիոնար մակերևութային հոսանքի կողմից Հարմոնիկ էլեկտրական հոսանքի դեպքում հաստատված է չգրգռված վիճակի դինամիկական կայունության կորուստ: Ստացված են բանաձևեր պարամետրական ռեզոնանսի կրիտիկական հաճախականությունների և անկայունության տիրույթների որոշման համար:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ Р. Н. Овакимян, Изв. АН АрмССР. Механика, т. 22, № 4 (1969).
- ² Р. Н. Овакимян, Изв. АН АрмССР. Механика, т. 32, № 3 (1979).
- ³ Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Электродинамика сплошных сред, Гостехиздат, М., 1957.
- ⁴ В. В. Новожилов, Основы нелинейной теории упругости, Гостехиздат, М., 1948.
- ⁵ В. В. Болотин, Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости, Физматгиз, М., 1961.
- ⁶ Г. Е. Багдасарян, П. А. Мкртчян, Изв. АН АрмССР. Механика, т. 34, № 6 (1981).
- ⁷ Н. С. Кошляков, Э. Б. Глиер, М. М. Смирнов, Уравнения в частных производных математической физики, Высшая школа, М., 1970.
- ⁸ Н. В. Мак-Лахлан, Теория и приложения функций Матье, ИЛ, М., 1953.
- ⁹ В. В. Лолотин, Динамическая устойчивость упругих систем, Гостехиздат, М., 1956.