ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXVIII 1984 5

УДК 519.1

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

К. О. Егиазарян

О пространственных обобщенных матрицах Адамара

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. Р. Варшамовым 4/VII 1983)

1. Начиная с 1970 г. в связи с различными практическими применениями матриц Адамара, такими как коды, исправляющие ошибки, обработка сигналов и т. д., все более возрастает интерес к изучению и построению пространственных матриц Адамара. В этом плане можно указать работы Шлихта [1,2], Эндрюса [3], Хаммера и Себерри [4], Агаяна [5].

Определение 1 [2]. n-мерной матрицей Адамара $|H]_n = \|h_{i_1 i_2 \ldots i_n}\|$ $(i_1, i_2, \ldots, i_n = 1, 2, \ldots, m)$ называется такая матрица, состоящая из $+1$ и -1, в которой все параллельные $(n-1)$-мерные сечения (сечения ориентаций (i_l) $1 \leqslant l \leqslant n$) взаимно ортогональны, т. е.

$$\sum_r \ldots \sum_t \ldots \sum_z h_{r \ldots \alpha \ldots z} \overline{h}_{r \ldots \beta \ldots z} = m^{(n-1)} \delta_{\alpha,\beta}, \quad (1)$$

где $(r \ldots t \ldots z)$ представляют все перестановки $(i_1 \ldots i_l \ldots i_n)$, $\delta_{\alpha,\beta}$ — символ Кронекера.

Полностью правильной, или регулярной [5], n-мерной матрицей Адамара является та, в которой все двумерные сечения (плоскости), в любых возможных нормальных осевых направлениях есть матрицы Адамара и, как следствие, все промежуточные k-мерные сечения $(2 < k < n)$ есть также полностью правильные пространственные матрицы Адамара.

В 1962 г. Батсон [6] ввел понятие обобщенной матрицы Адамара (или $H(p, m)$-матрицы) — ортогональной матрицы порядка m с элементами — корнями p-ой степени из 1, которое содержит в себе известные, практически часто используемые матрицы — Уолша, Фурье [9], Виленкина—Крестенсона—Кронекера [10], а также классические [7] и комплексные [8] матрицы Адамара.

В связи с вышеуказанным возникла задача введения, построения так называемых пространственных обобщенных матриц Адамара ($[H(p, m)]_n$-матриц), т. е. пространственных матриц с элементами — корнями p-ой степени из 1, которые удовлетворяют условию (1).

Основная задача. Для натуральных чисел p, m и n построить пространственную обобщенную матрицу Адамара $[H(p, m)]_n$.

В данной работе введено общее понятие пространственных матриц Адамара, содержащее в себе понятия пространственных матриц Адамара [2], классических [1] и обобщенных [6] матриц Адамара. Исследована задача построения пространственных обобщенных матриц Адамара. Приведены эффективные алгоритмы построения как полностью, так и частично правильных пространственных обобщенных матриц Адамара из обобщенных матриц Адамара и алгоритмы преобразования этих матриц. Преодолена трудность в описании разных классов пространственных матриц Адамара благодаря введению в рассмотрение алгебраического аппарата умножения многомерных матриц [11].

2. Обозначим через $[A]_n = \|A_{i_1 \ldots i_n}\|$; $[B]_n = \|B_{j_1 \ldots j_r}\|$ $(i_1, \ldots, i_n, j_1, \ldots, j_r = 1, \ldots, m)$ соответственно n-мерную и r-мерную матрицы m-го порядков. (λ, μ)-свернутым произведением [11] матрицы $[A]_n$ на $[B]_r$ по индексам разбиений s и c называется матрица $[D]_t$, если

$$[D]_t = \|D_{lsk}\| = {}^{\lambda,\mu}([A]_n [B]_r) = \|\sum_{(c)} A_{lsc} \underset{\smile}{B_{csk}}\|, \quad . \tag{2}$$

где $h = \varkappa + \lambda + \mu$; $r = \lambda + \mu + \nu$; $l = (l_1, l_2, \ldots, l_\varkappa)$; $s = (s_1, s_2, \ldots, s_\lambda)$; $c = (c_1, c_2, \ldots, c_\mu)$; $k = (k_1, k_2, \ldots, k_\nu)$; $t = n + r - \lambda - 2\mu$.

Пусть теперь H' — n-мерная матрица порядка m, а H'' — сопряжённая к ней матрица, и $H_t^{'}$ и $H_t^{''}$ — матрицы H' и H'' соответственно, транспонированные по определенным индексам [11] (t — фиксированное натуральное число).

Определение 2. n-мерную матрицу $H_t^{'}$ порядка m назовем (λ, μ)-ортогональной по всем нормальным осевым направлениям, если для натуральных λ, μ $(\mu \neq 0)$ выполняется система уравнений:

$$\begin{cases} {}^{\lambda,\mu}(H_t^{'} H_t^{''}) = m^{\mu} E(\lambda, k) \\ t = 1, 2, \ldots, N \end{cases} , \tag{3}$$

где $k = n - \lambda - \mu$; $E(\lambda, k)$ — $(\lambda + 2k)$-мерная единичная матрица [11], а

$$N = \begin{cases} n!/\lambda!\mu!k!, & \text{если } \mu \neq k \\ n!/2\lambda!\mu!k!, & \text{если } \mu = k \end{cases}$$

Замечание 1. Понятие (λ, μ)-ортогональной пространственной матрицы совпадает с понятиями:

а) пространственной обобщенной матрицы Адамара $|H(p, m)|_n$ при $\lambda + \mu = n - 1$ и если элементы матрицы $H_t^{'}$ являются корнями p-ой степени из 1. Выделим следующие случаи:

— при $\lambda = 0$, $\mu = n - 1$ имеем (общую) n-мерную обобщенную матрицу Адамара. Система (3) запишется как

$$\begin{cases} {}^{0,n-1}(H_t^{'} H_t^{''}) = m^{(n-1)} E(0, 1) \\ \text{где } H_t^{'} = H'\begin{pmatrix} i_1 i_2 \ldots i_{t-1} i_t \\ i_2 i_3 \ldots i_t i_1 \end{pmatrix}; \; H_t^{''} = H''\begin{pmatrix} i_t i_{t+1} \ldots i_n \\ i_n i_1 \ldots i_{n-1} \end{pmatrix}; \\ t = 1, 2, \ldots, n \end{cases} \tag{4}$$

— при $\lambda = n - 2$, $\mu = 1$ имеем полностью правильную n-мерную обобщенную матрицу Адамара, если выполняется следующая система из $n(n-1)/2$ уравнений, полученная из (3):

$$\begin{cases} {}^{n-2,1}(H'_{t_1,t_2} H''_{t_1,t_2}) = mE(n-2,\ 1) \\ \text{где } H'_{t_1,t_2} = H'\begin{pmatrix} i_1 \ldots i_{t_1-1} i_{t_1} i_{t_2} i_{t_2+1} \ldots i_n \\ i_2 \ldots i_{t_1} i_1 i_n i_{t_2} \ldots i_{n-1} \end{pmatrix} \\ H''_{t_1,t_2} = H''\begin{pmatrix} i_1 \ldots i_{t_1-1} i_{t_1} i_{t_2} i_{t_2+1} \ldots i_n \\ i_2 \ldots i_{t_1} i_n i_1 i_{t_2} \ldots i_{n-1} \end{pmatrix} \\ t_1 = 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1;\ t_2 = t_1+1,\ \ldots,\ n \end{cases} \tag{5}$$

Заметим, что при $n=2$ система (3) совпадает с известным [6] матричным уравнением в определении обобщенной матрицы Адамара;

б) пространственной (специальной) ортогональной матрицы, если в (3) $k=2, 3, \ldots, n-1$ и ортогональность по множеству направлений $i_l (l=1, \ldots, n)$.

Замечание 2. Если система (3) выполняется для $\lambda=\lambda_0$ $(\mu=\mu_0)$, то она выполнится и для $\lambda=\lambda_1<\lambda_0$ $(\mu=\mu_1>\mu_0)$.

3. Алгоритм построения пространственных обобщенных матриц Адамара. Приведем рекуррентный метод построения n-мерной обобщенной матрицы Адамара порядка $m: |H|_n = \|h^{(n)}_{i_1 i_2 \ldots i_n}\|$, $(i_1, i_2, \ldots, i_n = 0, 1, \ldots, m-1)$. Имеем $|H|_2 = \|h_{i_1 i_2}\| = \{\gamma_p^{\varphi(i_1, i_2)}\}^{m-1}_{i_1, i_2=0}$ — обобщенную матрицу Адамара, где γ_p здесь и в дальнейшем обозначает первообразный корень p-ой степени из 1.

а) Пусть построена k-мерная обобщенная матрица m-го порядка $|H|_k = \|h^{(k)}_{j_1 j_2 \ldots j_k}\|$, $(j_1, j_2, \ldots, j_k = 0, 1, \ldots, m-1)$. Строим матрицу $|A|_k = \|a^{(k)}_{l_1 l_2 \ldots l_k}\|$, $(l_1, l_2, \ldots, l_k = 0, 1, \ldots, m^2-1)$, полученную прямым произведением матрицы $|H|_k$ на себя. Тогда

$$|A|_k = \|a^{(k)}_{mi_1+j_1, \ldots, mi_k+j_k}\| = \|h^{(k)}_{i_1, \ldots, i_k} \cdot h^{(k)}_{j_1, \ldots, j_k}\|,\ (i_1, \ldots, i_k, j_1, \ldots, j_k = 0, 1, \ldots, m-1). \tag{6}$$

б) Определим $(k+1)$-мерную матрицу m-го порядка

$$|H|_{k+1} = \|h^{(k+1)}_{i_1 i_2 \ldots i_{k+1}}\| = \|a^{(k)}_{(m+1)i_1, (m+1)i_2, \ldots, (m+1)i_{k-1}, mi_k+i_{k+1}}\|, \tag{7}$$

являющуюся пространственной обобщенной матрицей Адамара.

Имея конструкцию матрицы $|H|_2$, равенства (6) и (7), получим n-мерную обобщенную матрицу Адамара

$$|H|_n = \|\gamma_p^{\sum\limits_{l=2}^{n-1} 2^{n-l-1} \cdot \varphi(i_1, i_l) + \varphi(i_1, i_n)}\|. \tag{8}$$

Алгоритм построения полностью правильных пространственных обобщенных матриц Адамара. Пусть $|B|_2 = \|b^{(2)}_{i_1, i_2}\| = \{\gamma_p^{i_1 i_2}\}^{p-1}_{i_1, i_2=0} - H(p, p)$ — обобщенная матрица Адамара, построенная по матрице Вандермонда [6]. Матрицу $|B|_n = \|b^{(n)}_{i_1 i_2 \ldots i_n}\| (i_1, i_2, \ldots, i_n = 0, 1, \ldots, p-1)$, $(n>2)$, определим рекуррентным способом:

$$\|b^{(n)}_{i_1 i_2 i_3 \ldots i_n}\| = \|b^{(n-1)}_{i_1+i_n, i_2+i_n, i_3, \ldots, i_{n-1}}\| \tag{9}$$

или же

$$\|b^{(n)}_{i_1 i_2 i_3 \ldots i_n}\| = \|b^{(2)}_{i_1+i_3+\ldots+i_n, i_2+i_3+\ldots+i_n}\| = \|\gamma_p^{(i_1+i_3+\ldots+i_n)(i_2+i_3+\ldots+i_n)}\|. \tag{10}$$

Далее проверяется, что матрицы $|B|_n (n=2, 3, \ldots)$ — полностью правильные пространственные обобщенные матрицы Адамара.

4. В этой части дадим некоторые приложения пространственных обобщенных матриц Адамара в дискретных ортогональных преобразованиях, в частности, пространственных унитарных преобразованиях.

Представим многомерное дискретное ортогональное преобразование в матричном виде

$$[A]_s = {}^{\lambda,\mu}([H]_n[X]_s), \tag{11}$$

где $n=\lambda+2\mu$, $s \geqslant \lambda+\mu$, здесь $[X]_s$—входная, а $[A]_s$—выходная s-мерные матрицы порядка m, $[H]_n$—ортогональная матрица, в частности, n-мерная обобщенная матрица Адамара.

Обратное преобразование от (11) запишем в следующем виде:

$$[X]_s = {}^{\lambda',\mu'}([H]_n^{-1}[A]_s), \tag{12}$$

где $n=\lambda'+2\mu'$, причем

$${}^{\lambda',\mu'}([H]_n^{-1}[H]_n) = E(\lambda, \mu). \tag{13}$$

В работе [4] описано дискретное преобразование Адамара от двух переменных, являющееся частным случаем вышеуказанного преобразования, которое записывалось следующим матричным уравнением:

$$[A]_2 = [W]_3[X]_2, \tag{14}$$

где $[X]_2$, $[A]_2$ соответственно входная и выходная (квадратная) матрицы порядка m и $[W]_3$—Уолш 3-куб (Хаар 3-куб, или другая ортогональная кубическая матрица). Обратное преобразование от (14) записывалось как

$$[X]_2 = [W]_3^{-1}[A]_2, \tag{15}$$

где $[W]_3^{-1}$ обратная матрица $[W]_3$.

Рассмотрим пример многомерного дискретного ортогонального преобразования пространственных обобщенных матриц Адамара.

Имеем входную s-мерную матрицу $[X]_s$. Равенство (11) запишем в виде

$$[A]_s = {}^{n-2,1}([H]_n[X]_s), \tag{16}$$

и, если выполняется

$${}^{n-2,1}([H]_n^{-1}[H]_n) = E(n-2, 1), \tag{17}$$

то умножив обе части (16) слева ((n—2, 1)-свернутым произведением) на $[H]_n^{-1}$, получим обратное ортогональное преобразование к (16)

$$\begin{aligned} {}^{n-2,1}([H]_n^{-1}[A]_s) &= {}^{n-2,1}([H]_n^{-1}\, {}^{n-2,1}([H]_n[X]_s)) = \\ &= {}^{n-2,1}({}^{n-2,1}([H]_n^{-1}[H]_n)[X]_s) = {}^{n-2,1}(E(n-2, 1)[X]_s) = [X]_s. \end{aligned} \tag{18}$$

Пусть теперь

$$[H]_n = \| H_{i_1 i_2 \ldots i_n} \| = \| \gamma_p^{(i_1+i_2+\ldots+i_n)(i_1+i_2+\ldots+i_n)} \|, \quad (i_1, i_2, \ldots, i_n = 0, 1, \ldots, p-1) \tag{19}$$

n-мерная обобщенная матрица Адамара. Равенство (17) выполняется при $[H]_n^{-1} = \left\| \frac{1}{p} \overline{H}^{(i_1, i_n)}_{i_1 i_2 \ldots i_n} \right\| = \left\| \frac{1}{p} \gamma_p^{-(i_1+i_2+\ldots+i_n)(i_1+i_2\ldots+i_{n-1})} \right\|$. Запишем (18), используя (19):

$$\|X_{i_1 i_2 \dots i_s}\| = \left\| \frac{1}{p} \sum_{j=0}^{p-1} \gamma_p^{-(i_1+i_2+\dots+i_{n-1}+j)(i_2+i_3+\dots+i_{n-1})} A_{j i_2 \dots i_s} \right\|. \qquad (20)$$

Теперь по матричному уравнению (16) и (20) получим тождество

$$\|X_{i_1 i_2 \dots i_s}\| = \left\| \frac{1}{p} \sum_{j=0}^{p-1} \gamma_p^{-(i_1+i_2+\dots+i_{n-1}+j)(i_2+i_3+\dots+i_{n-1})} \times \right.$$

$$\left. \times \sum_{l=0}^{p-1} \gamma_p^{(l+i_2+\dots+i_{n-1}+j)(i_2+\dots+i_{n-1}+j)} X_{l i_2 \dots i_s} \right\| =$$

$$= \left\| \frac{1}{p} \sum_{l=0}^{p-1} \gamma_p^{(l-i_1)[l+i_1+i_2+2(i_3+\dots+i_{n-1})]} \sum_{j=0}^{p-1} \gamma_p^{j(l-i_1)} X_{l i_2 \dots i_s} \right\| = \|X_{i_1 i_2 \dots i_s}\|,$$

которое доказывает правильность выбора $[H]_n$—пространственной обобщенной матрицы Адамара (полностью правильной).

Автор выражает признательность С. С. Агаяну за постановку задачи.

Вычислительный центр
Академии наук Армянской ССР
и Ереванского государственного университета

Կ. Օ. ԵՂԻԱԶԱՐՅԱՆ

Հադամարի տարածական ընդհանրացված մատրիցների մասին

Աշխատանքում տրված է Հադամարի տարածական մատրիցների ընդհանուր սահմանումը, որն ընդգրկում է իր մեջ Հադամարի դասական, տարածական և ընդհանրացված մատրիցների գաղափարը։ Ուսումնասիրված է Հադամարի տարածական ընդհանրացված մատրիցների կառուցման խնդիրը։ Բերված են Հադամարի մասնակի և լրիվ կանոնավոր տարածական ընդհանրացված մատրիցների կառուցման և արագ ձևափոխման ալգորիթմներ, մասնավորապես եթե գոյություն ունի Հադամարի ընդհանրացված մատրիցա, ապա՝ կառուցվում է n-չափանի (կամայական n-ի համար) Հադամարի ընդհանրացված մատրիցա նույն պարամետրերի և Վանդերմոնդի մատրիցայից կառուցվում են լրիվ կանոնավոր Հադամարի տարածական ընդհանրացված մատրիցներ։ Տարածական մատրիցների բազմապատկման հանրահաշվական մեթոդի շնորհիվ հաղթահարված են Հադամարի տարածական մատրիցների տարբեր դասերի նկարագրման դժվարությունները։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *P. J. Shlichta*, Bull. Amer. Phys. Soc., ser. 11, v. 16, p. 825—826 (1971). [2] *P. J. Shlichta*, IEEE Trans. on Inform. Theory, v. IT—25, № 5, p. 566—572 (1979). [3] *H. C. Andrews* (2). [4] *J. Hammer, J. Seberry*, IEEE Trans. on Inform. Theory, v. IT—27, №6, p. 772—779 (1981). [5] *С. С. Агаян*, ДАН АрмССР, 72, №3, 131—134 (1981). [6] *A. T. Butson*, Proc. Amer. Math. Soc., v. 13, p 894—898 (1962). [7] *М. Холл*, Комбинаторика, Мир, М., 1970. [8] *R. J. Turyn*, In: Combin. Structures and their Applications, Gordon and Breach, N. Y., 1970. [9] *Л. Рабинер, Б. Гоулд*. Теория и применение цифровой обработки сигналов, Мир, М., 1978. [10] *А. М. Трахтман, В. А. Трахтман*, Основы теории дискретных сигналов на конечных интервалах, Сов. радио, М. 1975. [11] *Н. П. Соколов*, Введение в теорию многомерных матриц, Наукова думка, Киев, 1972.