ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
LXXVIII 1984 5

УДК 519.49

МАТЕМАТИКА

В. Д. Мартиросян

# О дистрибутивности решеток подмногообразий многообразий правоальтернативных алгебр

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. А. Александряном 23/III 1983)

В работе описываются многообразия правоальтернативных алгебр над полем характеристики нуль, решетки подмногообразий которых дистрибутивны, доказывается шпехтовость таких многообразий и приводится список минимальных многообразий правоальтернативных алгебр, решетки подмногообразий которых недистрибутивны. Задача об описании в терминах тождеств многообразий линейных алгебр с дистрибутивными решетками подмногообразий поставлена Л. А. Бокутем (см. ([1]), задача 1.19). В работе А. З. Ананьина и А. Р. Кемера ([2]) описаны многообразия ассоциативных алгебр над полем характеристики нуль, решетки подмногообразий которых дистрибутивны. Аналогичные описания для многообразий альтернативных алгебр и многообразий $(-1,1)$-алгебр над полем характеристики нуль получены в работах автора ([3,4]). В работе Ю. Н. Мальцева ([5]) описаны минимальные многообразия ассоциативных алгебр над полем характеристики нуль, решетки подмногообразий которых недистрибутивны.

Пусть $K$—произвольное поле характеристики нуль, $S_n$—симметрическая группа на множестве $\{1, 2, \ldots, n\}$, $KS_n$—групповая алгебра группы $S_n$, $V$—некоторое многообразие линейных (неассоциативных) алгебр над полем $K$, $F=F_V(X)$—свободная алгебра многообразия $V$ со множеством свободных образующих $X=\{x_1, x_2, \ldots\}$, $L(V)$—решетка подмногообразий многообразия $V$, $F_n$—пространство полилинейных многочленов из $F$ от фиксированных переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$. $F_n$ является левым $KS_n$-модулем. Через $L_n$ обозначим решетку $KS_n$-подмодулей в $F_n$. Для диаграммы Юнга $D$ через $e_D$ обозначим соответствующий, пропорциональный идемпотенту элемент из $KS_n$ (определения разбиения натурального числа, таблицы, соответствующей этому разбиению, и диаграммы Юнга см. в ([3])).

Из результатов ([6]) следует

Предложение 1. *Пусть $V$—многообразие линейных алгебр над полем $K$. Решетка $L(V)$ дистрибутивна тогда и только тогда, когда дистрибутивны решетки $L_n$ при всех $n \geqslant 1$.*

Предложение 2. *Решетка $L_n$ дистрибутивна тогда и только тогда, когда $KS_n$-модуль $F_n$ является прямой суммой неприводимых попарно неизоморфных $KS_n$-подмодулей.*

Заметим, что решетки $L_1$ и $L_2$ всегда дистрибутивны.

Из теории представлений группы $S_n$ с помощью диаграмм Юнга и предложения 2 вытекает

Предложение 3. *Дистрибутивность решетки $L_n$ эквивалентна следующему условию: пусть $\{n_1, n_2, \ldots, n_l\}$—любое разбиение числа $n$, $T$—соответствующая этому разбиению таблица, $D$—фиксированная диаграмма Юнга таблицы $T$, а одночлены $v_1$, $v_2 \in F_n$ такие, что $e_D v_1 \neq 0$, $e_D v_2 \neq 0$. Тогда $KS_n e_D v_1 = KS_n e_D v_2$.*

Введем некоторые обозначения: $[x, y] = xy - yx$—коммутатор элементов $x$ и $y$, $(x, y, z) = (xy)z - x(yz)$—ассоциатор элементов $x$, $y$ и $z$, $S(x, y, z) = (x, y, z) + (y, z, x) + (z, x, y)$, $S_3^1(x_1, x_2, x_3) = \sum_{\sigma \in S_3} (-1)^\sigma \sigma(x_1 x_2) x_3$, $S_3^2(x_1, x_2, x_3) = \sum_{\sigma \in S_3} (-1)^\sigma \sigma x_1(x_2 x_3)$.

Определения. Алгебра $A$ над полем $K$ называется правоальтернативной (левоальтернативной), если в $A$ выполняется тождество $(x, y, y) = 0$ ($(y, y, x) = 0$). Алгебра $A$ называется альтернативной, если $A$ одновременно правоальтернативна и левоальтернативна. Тождество $(x, y, y) = 0$ называется тождеством правоальтернативности. Правоальтернативная алгебра $A$ называется $(-1, 1)$-алгеброй, если в $A$ выполняется тождество $S(x, y, z) = 0$.

Пусть Alt—многообразие всех альтернативных алгебр над полем $K$.

Теорема 1. *Пусть $V$—многообразие правоальтернативных алгебр над полем $K$ и $V \not\subseteq$ Alt. Для дистрибутивности решетки $L(V)$ необходимо и достаточно, чтобы для некоторых $\alpha_1, \beta_1, \gamma, \delta \in K$ ($(\gamma, \delta) \neq (0, 0)$) в $V$ выполнялись тождества*

$$[x, y]y = \alpha_1(y, x, y), \tag{1}$$

$$y[x, y] = \beta_1(y, x, y), \tag{2}$$

$$\gamma S_3^1(x, y, z) + \delta S_3^2(x, y, z) = 0. \tag{3}$$

Доказательство теоремы 1 опирается в основном на следующие леммы.

Лемма 1. *Пусть $V$—многообразие правоальтернативных алгебр над полем $K$ и $V \not\subseteq$ Alt. Для дистрибутивности $L_3$ необходимо и достаточно, чтобы в $V$ выполнялись тождества* (1)—(3).

Доказательство леммы следует из предложения 3.

Лемма 2. *Пусть $\gamma + \delta \neq 0$. Тогда из* (1)—(3) *и тождества правоальтернативности вытекает тождество*

$$\alpha[x, y]z + \beta z[x, y] = \delta_1 S(x, y, z), \tag{4}$$

*где* $\alpha = \beta_1$, $\beta = -\alpha_1$, $\delta_1 = 2(\alpha\delta - \beta\gamma)/3(\gamma + \delta)$.

Доказательство. Из (1) и (2) следует тождество

$$\alpha[x, y]y + \beta y[x, y] = 0,$$

откуда имеем:

$$\alpha[x, y]y + \beta((yx)y - y^2 x) + 2\beta(y, y, x) = 0, \tag{5}$$

$$\alpha(xy^2 - y(xy)) + \beta y[x, y] + \alpha(y, y, x) = 0. \tag{6}$$

Линеаризуя (5) и (6), получим:

$$\alpha[x, y]z + \alpha[x, z]y + \beta((zx)y - (zy)x +$$

$$+(yx)z-(yz)x+2\beta((y, z, x)+(z, y, x))=0, \tag{7}$$

$$\alpha(x(yz)+x(zy)-y(xz)-z(xy))+\beta y[x, z]+$$
$$+\beta z[x, y]+\alpha((y, z, x)+(z, y, x))=0. \tag{8}$$

Умножим (3) на $(\alpha+\beta)$, (7) на $(-\gamma)$, (8) на $(-\delta)$ и сложим полученные тождества. Получи : $(1-2(12))[\alpha\gamma((yz)x-(zy)x)+\alpha\delta(y(zx)-z(yx))+\beta\gamma((xy)z-(xz)y)+\beta\delta(x(yz)-x(zy))]=(2\beta\gamma+\alpha\delta)((y, z, x)+(z, y, x))$, откуда, обозначая выражение в квадратных скобках через $f$, имеем:

$$f=-\frac{2\beta\gamma+\alpha\delta}{3}[(z, x, y)+(y, z, x)-2(x, y, z)],$$

что после несложных преобразований приводит к тождеству (4).

Замечание 1. Пусть $\gamma+\delta=0$. Тогда многообразие $V$ правоальтернативных алгебр, удовлетворяющих тождеству (3), будет многообразием $(-1, 1)$-алгебр, и, следовательно, утверждение теоремы 1 в этом случае справедливо в силу результата работы [4]. Ввиду этого далее будем считать, что $\gamma+\delta\neq 0$.

Имеют место следующие утверждения:

Лемма 3. *Из (1), (2) и тождества правоальтернативности вытекают следующие тождества:*

$$[[x, y], z]=\gamma_1(z, x, y)+\frac{2-\gamma_1}{3}S(x, y, z), \tag{9}$$

$$[xy, z]=\alpha'(x, y, z)+\beta'(z, x, y)+\gamma' S(x, y, z), \tag{10}$$

*где* $\gamma_1=\alpha_1-\beta_1$, $\alpha'=\alpha_1+\beta_1+2$, $\beta'=\alpha_1+1$, $\gamma'=-(2\alpha_1+\beta_1+2)/3$.

Лемма 4. *Пусть* $\delta_1\neq 0$, $\gamma_1\neq 0$, *$V$ — многообразие правоальтернативных алгебр, удовлетворяющих тождествам* (4), (9) *и* (10), *$F(x, y)$ — свободная алгебра ранга 2 многообразия $V$. Тогда одночлены из $F(x, y)$ степени $\geqslant 4$ коммутативно-ассоциативны и для любых одночленов $v_1, v_2 \in F_4$ в многообразии $V$ выполнены тождества $t^2(v_1-v_2)=(v_1-v_2)t^2=0$. Если, кроме того, $\alpha'\neq 0$, то для некоторых $\omega_1, \omega_2 \in K$, $(\omega_1, \omega_2)\neq(0, 0)$, в $V$ выполняется тождество $\omega_1(x^2, y, z)+\omega_2(y, z, x^2)=0$.*

Из доказательства теоремы 1 получено следующее

Следствие. *Пусть $V$ — многообразие правоальтернативных алгебр, удовлетворяющих тождествам* (4) *и* (10). *Тогда* $\dim F_n\leqslant n+1$ *при* $n\geqslant 4$. *Более того, если выполнены условия* $(\alpha, \beta, \gamma)\neq(0, 1, 0)$, $(\alpha\delta-\beta\gamma, \alpha, \gamma)\neq(0, \beta, \delta)$, $(\alpha\delta-\beta\gamma, \alpha, \beta)\neq(0, -2, -1)$, *то* $\dim F_n\leqslant 1$ *при* $n\geqslant 7$.

Определение. Многообразие линейных алгебр $W$ называется шпехтовым, если любое подмногообразие $U\subseteq W$ конечнобазируемо, т. е. может быть задано конечным множеством тождеств.

Теорема 2. *Пусть $V$ — многообразие правоальтернативных алгебр над полем $K$, решетка подмногообразий которого дистрибутивна. Тогда $V$ шпехтово.*

Доказательство теоремы 2 основывается на следствии из теоремы 1.

В связи с утверждением теоремы 1 и результатом работы ([3]) возникает задача об описании минимальных многообразий правоальтернативных алгебр с недистрибутивными решетками подмногообразий:

Теорема 3. *Многообразие $V$ правоальтернативных алгебр над полем $K$ характеристики нуль является минимальным многообразием с недистрибутивной решеткой подмногообразий тогда и только тогда, когда $V$—нильпотентное индекса 4 многообразие, задаваемое тождествами одного из следующих множеств:*

$$T_1 = \{(y, x, y) = x^3 = [x, y]y = y[x, y] = 0\},$$

$$T(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = \{x^3 = S_3^1(x, y, z) = S_3^2(x, y, z) =$$

$$= \omega_1[x, y]y + \omega_2 y[x, y] + \omega_3(y, x, y) = 0\},$$

*где* $\omega_1, \omega_2, \omega_3 \in K$, $(\omega_1, \omega_2, \omega_3) \neq (0, 0, 0)$.

Замечание 2. Утверждения теорем 1—3 остаются в силе, если $V$—многообразие левоальтернативных алгебр над полем $K$.

В заключение автор выражает глубокую благодарность В. А. Артамонову за внимание к работе.

Ереванский государственный университет

Վ. Ջ. ՄԱՐՏԻՐՈՍՅԱՆ

## Աջ ալտերնատիվ հանրահաշիվների բազմաձևությունների ենթաբազմաձևությունների կավարների բաշխականության մասին

*Հոդվածում նույնությունների լեզվով նկարագրվում են զրո բնութագրիչի դաշտի վրա որոշված գծային աջ ալտերնատիվ հանրահաշիվների այն բազմաձևությունները, որոնց ենթաբազմաձևությունների կավարները բաշխական են։ Ապացուցվում է, որ եթե զրո բնութագրիչի դաշտի վրա որոշված աջ ալտերնատիվ հանրահաշիվների բազմաձևության ենթաբազմաձևությունների կավարը բաշխական է, ապա այդ բազմաձևությունը շպեխտյան է, այսինքն նրան կամայական ենթաբազմաձևություն կարելի է տալ վերջավոր քանակությամբ նույնություններով։*

*Հոդվածում բերվում է զրո բնութագրիչի դաշտի վրա որոշված աջ ալտերնատիվ հանրահաշիվների այն մինիմալ բազմաձևությունների թվարկումը, որոնց ենթաբազմաձևությունների կավարները բաշխական չեն։*

## ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] Днестровская тетрадь, Ин-т математики СО АН СССР. Новосибирск, 1982. [2] *А. З. Ананьин, А. Р. Кемер,* Сиб. мат. журн., т. 17, № 4 (1978). [3] *В. Д. Мартиросян,* Мат. сб., т. 118(160), № 1(5) (1982). [4] *В. Д. Мартиросян,* О дистрибутивности решеток подмногообразий многообразий (—1,1)-алгебр, рукопись деп. в ВИНИТИ 13 июля 1981 г., № 3457—81 Деп. [5] *Ю. Н. Мальцев,* Мат. исследования, вып. 56 (1980). [6] *В. А. Артамонов,* УМН, т. 33, вып. 2(200) (1978).