ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
LXXVIII 1984 4

УДК 539.376

МЕХАНИКА

Академик АН Армянской ССР Н. Х. Арутюнян, А. Д. Дроздов, В. Б. Колмановский

Об устойчивости цилиндрической трубы в стареющей вязкоупругой среде

(Представлено 16/XII 1983)

Исследуется устойчивость длинной упругой трубы, находящейся внутри стареющей вязкоупругой среды. Установлены условия устойчивости, формулируемые непосредственно в терминах характеристик трубы и реологических свойств среды. Подобные задачи представляют интерес при изучении устойчивости обсадных труб и подземных сооружений ([1–3]). В случае, когда среда упругая, задача об устойчивости обсадных труб рассматривалась в ([4]). Работа примыкает к исследованиям ([5–8]).

1. *Постановка задачи.* Пусть стареющая вязкоупругая среда занимает все трехмерное пространство. Координаты точек среды в декартовой системе координат $O\,x_1x_2x_3$ обозначены (x_1, x_2, x_3). Из среды вырезан цилиндр $x_1^2+x_2^2\leq 1$, радиус которого без ограничения общности можно принять равным единице. В получившееся отверстие вставлена круглая упругая труба, внешний радиус которой равен единице. После этого в момент времени $t=0$ на бесконечности среды приложены сжимающие усилия постоянной интенсивности P, а к внутренней поверхности трубы—усилия $g=(g_1, g_2, 0)$, причем как P, так и g направлены перпендикулярно оси трубы. Кроме того усилия g статически эквивалентны нулю. Предполагается, что труба жестко сцеплена с окружающей ее средой. Под действием усилий P и g как в трубе, так и в среде реализуется плоское деформированное состояние

$$u_3=\omega_3=0,\quad u_1=u_1(t,\rho,\theta),\quad u_2=u_2(t,\rho,\theta),\quad \omega_1=\omega_1(t,\theta),\quad \omega_2=\omega_2(t,\theta).$$

Здесь u_i и ω_i проекции вектора перемещений среды и трубы на оси цилиндрической системы координат $O\rho\theta x_3$.

Определение. Труба называется устойчивой, если для любого $\varepsilon>0$ найдется такое $\delta(\varepsilon)>0$, что из неравенства $|g_1(\theta)|+|g_2(\theta)|<\delta(\varepsilon)$ вытекает оценка

$$|\omega_1(t,\theta)|+|\omega_2(t,\theta)|<\varepsilon,\quad t\geq 0,\quad -\pi\leq\theta\leq\pi.$$

2. *Уравнение для прогибов трубы.* Считается, что труба представляет собой упругую цилиндрическую оболочку бесконечной длины и постоянной толщины $h\ll 1$. Перемещения срединной поверхности трубы малы по сравнению с h. Компоненты ε_{ij} тензора деформаций связаны с компонентами σ_{ij} тензора напряжений в системе координат $O\rho\theta x_3$ соотношениями

$$\varepsilon_{jl}=E_0^{-1}[(1+\nu_0)\sigma_{jl}-\nu_0\delta_{jl}\sigma].$$

Здесь E_0, ν_0—постоянные модуль упругости и коэффициент Пуассона материала трубы, $\sigma=\sigma_{jj}$, δ_{jl}—символ Кронекера, по повторяющимся индексам производится суммирование.

Пусть N нормальное усилие, Q перерезывающая сила и M изгибающий момент, т. е.

$$N=\int\limits_{1-h}^{1}\sigma_{22}d\rho,\quad Q=\int\limits_{1-h}^{1}\sigma_{12}d\rho,\quad M=\int\limits_{1-h}^{1}\sigma_{22}\left(\frac{h}{2}+1-\rho\right)d\rho.$$

Элемент трубы единичной высоты и толщины h интерпретируется как тонкий упругий стержень. Используя уравнения равновесия элемента трубы ([9], с. 421), получаем, что с точностью $0(h)$

$$\omega_1=-\partial\omega_2/\partial\theta,\quad D[\partial^6\omega_2/\partial\theta^6+2\partial^4\omega_2/\partial\theta^4+\partial^2\omega_2/\partial\theta^2]+$$

$$+q[\partial^4\omega_2/\partial\theta^4+\partial^2\omega_2/\partial\theta^2]+q_2-\frac{\partial q_1}{\partial\theta}=0. \tag{2.1}$$

Здесь D—цилиндрическая жесткость трубы; интенсивность суммарных усилий, приложенных к элементу трубы и направленных вдоль оси 0ρ, обозначена через $q+q_1$, а направленных вдоль оси θ—через q_2. При этом q есть не зависящее от θ нормальное давление, а q_1 и q_2—величины порядка $0(h)$.

Граничные условия для уравнения (2.1) имеют вид

$$\partial^j\omega_2/\partial\theta^j|_{\theta=0}=\partial^j\omega_2/\partial\theta^j|_{\theta=2\pi};\quad j=0,\,1,\,\ldots,\,5. \tag{2.2}$$

Отметим, что $q_1=q_2=0$ при $g=0$. Если $g=0$ и нормальное давление q меньше эйлерова критического значения q_*, то прогиб $\omega_2=0$. Значит, в силу (2.1) и $\omega_1=0$. В этом случае $M=Q=0$. Таким образом, при $q<q_*$, $q_1=q_2=0$ в трубе возникает только постоянное нормальное усилие $N=-q$, уравновешивающее внешнее усилие p. Для того чтобы замкнуть уравнения (2.1), (2.2), необходимо определить q_1, q_2 в зависимости от ω_2. Это сделано в следующем пункте.

3. *Напряженно-деформированное состояние среды*. Обозначим в этом пункте через σ_{jl} и ε_{jl} компоненты тензоров напряжений и деформаций среды в системе координат $0\rho\theta x_3$. Поскольку большинство природных материалов при объемной деформации ведут себя упруго ([10]), примем, что среднее напряжение $\sigma=\sigma_{jj}/3$ и средняя объемная деформация $\varepsilon=\varepsilon_{jj}/3$ связаны соотношением $\varepsilon=(1-2\nu)E^{-1}\sigma$, где E, ν—постоянные модуль упругости и коэффициент Пуассона материала среды. Девиаторы e_{ij}, s_{ij} тензоров деформаций и напряжений рассматриваемой среды удовлетворяют реологическому соотношению

$$s_{ij}=E(1+\nu)^{-1}(I-R)e_{ij}. \tag{3.1}$$

Здесь I—тождественный оператор, R—оператор релаксации с ядром $r(t,\,\tau)$

$$Re_{ij}=\int\limits_0^t r(t,\,\tau)e_{ij}d\tau.$$

Используя (3.1) и тот факт, что задача рассматривается в рамках плоской деформации, уравнения состояния среды можно представить в виде

$$(I-R)\varepsilon_{ij}=(1+\nu)E^{-1}[\sigma_{ij}-(\nu\sigma_0+(1+\nu)K_1\sigma_0)\delta_{ij}],$$

$$\sigma_0=\sigma_{11}+\sigma_{22},\quad I+K_1=(I-(1-2\nu)R/3)^{-1}. \tag{3.2}$$

Введем функцию Эри F по формулам

$$\sigma_{11}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial F}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 F}{\partial\theta^2},\qquad \sigma_{22}=\frac{\partial^2 F}{\partial\rho^2},$$

$$\sigma_{12}=-\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial F}{\partial\theta}\right). \tag{3.3}$$

Из (3.2) и уравнений совместности деформаций вытекает, что функция Эри F удовлетворяет бигармоническому уравнению

$$\Delta^2F=0 \tag{3.4}$$

с граничными условиями

$$\sigma_{11}=\sigma_{22}=-p,\quad \sigma_{12}=0 \text{ при } \rho=\infty, \tag{3.5}$$

$$u_1=-\partial\omega_2/\partial\theta,\quad u_2=\omega_2. \tag{3.6}$$

Представим F в виде $F=F^0+F^1$, где F_0 удовлетворяет уравнению (3.4), граничному условию (3.5) и нулевому граничному условию (3.6), а F^1 удовлетворяет уравнению (3.4), граничному условию (3.6) и нулевому граничному (3.5).

Обозначим через σ^0_{ij} и σ^1_{ij} напряжения, определяемые формулами (3.3) при $F=F^0$ и $F=F^1$.

Используя явный вид решения уравнения (3.4) в симметричном случае ([11]) и соотношения (3.3), получаем

$$\sigma^0_{11}=-p(1+A(t)\rho^{-2}),\quad \sigma^0_{22}=-p(1-A(t)\rho^{-2}),$$

$$\sigma^0_{12}=0,\quad A(t)=1-2(3\nu I+(1-2\nu)R)(3I-(1-2\nu)R)^{-1}\cdot 1,$$

где $R\cdot 1$ функция, равная действию оператора R на единицу.

Для определения компонент σ^1_{ij} используется комплексное представление напряжений. Используя модифицированные результаты ([12]), можно показать, что

$$\sigma^1_{11}(t,\theta)=\sum_{n=2}^{\infty}(n^2-1)(S+S_1)(b_n(t)\cos n\theta-a_n(t)\sin n\theta),$$

$$\sigma^1_{12}(t,\theta)=\sum_{n=2}^{\infty}(n^2-1)(S_1-S)(a_n(t)\cos n\theta+b_n(t)\sin n\theta). \tag{3.8}$$

Здесь $S_1=\mu(I-R)$, $S=\mu\varkappa^{-1}(I+R_1)(I-R)$ постоянная $\varkappa=3-4\nu$ и положено

$$I+R_1=[I-4(1+\nu)(3-4\nu)^{-1}K_1]^{-1},\quad \mu=E[2(1+\nu)]^{-1}.$$

Формулы (3.7) при $\rho=1$ и (3.8) определяют воздействие на трубу со стороны среды. Это воздействие сводится к касательному усилию интенсивности σ_{12}^1 и нормальному давлению интенсивности $-\sigma_{11}= -\sigma_{11}^0-\sigma_{11}^1$. При этом в уравнении (2.1) усилия q, q_1, q_2 равны

$$q=-\sigma_{11}^0, \quad q_1=g_1-\sigma_{11}^1, \quad q_2=\dot{g}_2+\sigma_{12}^1, \tag{3.9}$$

где σ_{11}^0, σ_{11}^1, σ_{12}^1 определяются формулами (3.7) при $\rho=1$ и (3.8).

4. *Условия устойчивости.* Опишем способ получения условий устойчивости. Разложим функцию $\omega_2(t, \theta)$ в ряд Фурье

$$\omega_2(t, \theta)=\sum_{n=1}^{\infty}(a_n(t)\cos n\theta+b_n(t)\sin n\theta). \tag{4.1}$$

Подставим это разложение в уравнение равновесия (2.1), домножим обе части либо на $\cos n\theta$, либо на $\sin n\theta$ и проинтегрируем по θ в пределах $0\leqslant\theta\leqslant2\pi$. В результате получим систему уравнений, определяющих коэффициенты a_n и b_n в (4.1).

Оценивая решения этих уравнений и используя разложение (4.1), получаем различные условия устойчивости цилиндрической формы трубы. Приведем некоторые из них. Пусть $(I+R_1)(I-R)= =(I-R_2)$. Ядра r и r_2 операторов R и R_2 удовлетворяют условиям ($l_i(t, \tau)$ — непрерывные функции)

$$\begin{gathered}\|r\|=\sup_{t\geqslant0}\int_0^t|r(t, s)|ds<1, \quad \|r_2\|<1,\\ r(t, \tau)=l_0(t, \tau)(t-\tau)^{-\beta_1}+l_1(t, \tau),\\ r_2(t, \tau)=l_2(t, \tau)(t-\tau)^{-\beta_2}+l_3(t, \tau).\end{gathered} \tag{4.2}$$

Введем в рассмотрение число

$$\gamma(r, r_2)=\min_n n^{-2}[Dn^2(n^2-1)+\mu(1-\|r\|)(n-1)+ +\mu\varkappa^{-1}(1-\|r_2\|)(n+1)], \quad n\geqslant2.$$

Теорема 4.1. *Пусть выполнены условия* (4.2) *для ядер* r *и* r_2. *Тогда труба устойчива, если* $p<(1+A(t))^{-1}\gamma_1(r, r_2)$ *при всех* $t\geqslant0$.

Теорема 4.2. *Пусть существуют такие функции* $r^0(t, \tau)$, $r_2^0(t, \tau)$, *удовлетворяющие условиям* (4.2), *что*

$$\lim_{T\to\infty}\sup_{t\geqslant T}\left|\int_T^t|r(t, s)-r^0(t, s)|ds+\int_T^t|r_2(t, s)-r_2^0(t, s)|ds\right|=0.$$

Тогда труба устойчива, если $p<(1+A(t))^{-1}\gamma_1(r^0, r_2^0)$ *при всех* $t\geqslant0$.

Замечание. Пусть уравнение состояния среды вместо (3.2) имеет вид

$$\sigma_{ij}=E(1+\nu)^{-1}(I-R)[\varepsilon_{ij}+3\nu(1-2\nu)^{-1}\delta_{ij}\varepsilon],$$

что соответствует случаю, когда ядра ползучести и релаксации сдвиговой и объемной деформации равны.

Тогда $R_1=K_1=0$ и условие устойчивости трубы в теореме 4.1 будет $p<(\lambda+\mu)(\lambda+2\mu)^{-1}\gamma(r, 0)$, а в условиях теоремы 4.2 $p<(\lambda+ +\mu)(\lambda+2\mu)^{-1}\gamma_1(r^0, 0)$.

Отметим, что эти условия устойчивости являются необходимыми и достаточными.

Институт проблем механики АН СССР
Московский автомеханический институт

Հայկական ՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս՝ Ն. Խ. ՀԱՐՈՒԹՅՈՒՆՅԱՆ, Ա. Դ. ԴՐՈԶԴՈՎ,
Վ. Բ. ԿՈԼՄԱՆՈՎՍԿԻ

Ծերացող առաձգամածուցիկ միջավայրում գտնվող գլանային խողովակի կայունության մասին

Դիտարկվում է ծերացող առաձգամածուցիկ միջավայրում գտնվող երկար առաձգական խողովակի կայունությունը։ Սահմանվել են կայունության պայմանները, որոնք ձևակերպված են անմիջականորեն խողովակի որոշիչների և միջավայրի ռեոլոգիական հատկությունների տերմիններով։

Նման խնդիրների լուծումը հետաքրքրություն է ներկայացնում ընդգետնյա կառուցվածքների և խողովակների կայունությունն ուսումնասիրելու ժամանակ։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *А. Н. Гузь,* Основы теории устойчивости горных выработок. Наукова думка, Киев, 1977. [2] *М. Т. Алимжанов,* Устойчивость равновесия тел и задачи механики горных пород, Наука, Алма-Ата, 1982. [3] *В. Т. Глушко,* Проявление горного давления в глубоких шахтах. Наукова думка, Киев, 1971. [4] *М. Я. Леонов, В. В. Панисюк,* Изв. АН СССР. ОТН, № 5 (1954). [5] *Н. Х. Арутюнян, В. Б. Колмановский,* ДАН СССР, т. 258, № 6 (1981). [6] *Н. Х. Арутюнян, В. Б. Колмановский,* ПММ, т. 43, вып. 4 (1979). [7] *Н. Х. Арутюнян, В. Б. Колмановский,* ПММ, т. 45, вып. 6 (1981). [8] *А. Д. Дроздов, В. Б. Колмановский, В. Д. Потапов,* ДАН АрмССР, т. 78, № 3 (1984). [9] *А. Р. Ржаницын,* Устойчивость равновесия упругих сисетм. Гсотех издат, М., 1955. [10] *В. А. Пальмов,* Успехи механики, т. 3, вып 3 (1980). [11] *Л. И. Седов,* Механика сплошной среды. Т. 2, Наука, М., 1976. [12] *Н. И. Мусхелишвили,* Некоторые основные задачи математической теории упругости, Изд-во АН СССР, М., 1954.