

УДК 539.376

МЕХАНИКА

Г. Ю. Ермоленко, В. В. Колокольчиков

О решении задач главной кубической теории вязкоупругости для неоднородно-стареющих тел

(Представлено академиком АН Армянской ССР Н. Х. Арутюняном 7/І 1983)

Рассмотрим класс материалов, для которых справедлива главная кубическая теория вязкоупругости ^(1,2). Если элементы вязкоупругого тела изготовлены в различные моменты времени, то возраст материала в таком теле неоднороден и зависит от пространственных координат ⁽³⁾. Пусть элемент с координатами r изготовлен в момент времени $\tau^*(r)$. Тогда краевая задача для такого неоднородно-стареющего вязкоупругого тела может быть описана уравнениями:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij,j} + X_i &= 0; \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \{u_{i,j} + u_{j,i}\}; \quad t_* \equiv t - \tau^*(r); \\ e_{ij}(t) &= \frac{s_{ij}(t)}{2G(t_*)} - \int_{\tau_0}^t K_1(t - \tau^*(r), \tau - \tau^*(r)) s_{ij}(\tau) d\tau + \\ &+ \int_{\tau_0}^t K_2(t - \tau^*(r), \tau - \tau^*(r)) s_{mn}(\tau) s_{mn}(\tau) s_{ij}(\tau) d\tau; \\ \varepsilon_{ii}(t) &= \frac{\sigma_{ii}(t)}{3K(t_*)} - \int_{\tau_0}^t K_3(t - \tau^*(r), \tau - \tau^*(r)) \sigma_{ii}(\tau) d\tau; \\ \sigma_{ij}(t) n_j &= P_i(t), \quad x \in S_\sigma; \quad u_i = u_i^0(t), \quad x \in S_u. \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь σ_{ij} , ε_{ij} — компоненты тензоров напряжений и деформаций, X_i , u_i — компоненты массовых сил и вектора перемещений; s_{ij} , e_{ij} — компоненты девиаторов напряжений и деформаций; $G(t)$, $K(t)$ — сдвиговой и объемный модули; P_i — поверхностные силы, заданные на поверхности S_σ , а u_i^0 — перемещения, заданные на поверхности S_u ; $K_1(t - \tau^*(r), \tau - \tau^*(r))$, $K_2(t - \tau^*(r), \tau - \tau^*(r))$, $K_3(t - \tau^*(r), \tau - \tau^*(r))$ — ядра интегральных операторов.

Определяющие соотношения теории вязкоупругости для неоднородно-стареющих тел в линейной области описываются уравнениями Н. Х. Арутюняна ⁽⁴⁾:

$$e_{ij}(t) = \frac{s_{ij}(t)}{2G(t_*)} - \int_{\tau_0}^t K_1(t - \tau^*(r), \tau - \tau^*(r)) s_{ij}(\tau) d\tau,$$

$$\varepsilon_{il}(t) = \frac{\sigma_{il}(t)}{3K(t_*)} - \int_{\tau_0}^t K_3(t-\tau^*(r), \tau-\tau^*(r)) \sigma_{il}(\tau) d\tau. \quad (2)$$

Здесь (*) $K_1(t-\tau^*(r), \tau-\tau^*(r)) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \tau} [1/G(t_*) + \omega(t-\tau^*(r), \tau-\tau^*(r))];$

$\omega(t-\tau^*(r), \tau-\tau^*(r))$ — мера ползучести на сдвиг. Формулы (2) с такими ядрами разрешимы в квадратурах, т. е. (*):

$$\begin{aligned} s_{ij}(t) &= 2G(t_*) e_{ij}(t) + \int_{\tau_0}^t \text{Res}_1(t-\tau^*(r), \tau-\tau^*(r)) e_{ij}(\tau) d\tau; \\ \sigma_{il}(t) &= 3K(t_*) \varepsilon_{il}(t) + \int_{\tau_0}^t \text{Res}_2(t-\tau^*(r), \tau-\tau^*(r)) \varepsilon_{il}(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \text{Res}_1(t-\tau^*(r), \tau-\tau^*(r)) &= -\frac{\partial}{\partial \tau} \left[G(\tau-\tau^*(r)) - \gamma \varphi(\tau-\tau^*(r)) \times \right. \\ &\quad \left. \times G^2(\tau-\tau^*(r)) \exp(\eta(\tau-\tau^*(r))) \int_{\tau-\tau^*(r)}^{\tau-\tau^*(r)} \exp(-\eta(z)) dz \right], \end{aligned}$$

причем

$$\eta(\tau-\tau^*(r)) = \int_{\tau_0}^{\tau-\tau^*(r)} \left[\gamma(1 + \varphi(\tau-\tau^*(r))G(\tau-\tau^*(r))) - \frac{G'(\tau-\tau^*(r))}{G(\tau-\tau^*(r))} \right] d\tau.$$

Запишем (2) в виде

$$\begin{aligned} e_{ij}(t) &= - \int_{\tau_0}^t \left[K_1(t-\tau^*(r), \tau-\tau^*(r)) - \frac{\partial(t-\tau)}{2G(t_*)} \right] s_{ij}(\tau) d\tau = \\ &= \int_0^\infty K_1^0(t-\tau^*(r), \tau-\tau^*(r)) s_{ij}(\tau) d\tau, \\ \varepsilon_{il}(t) &= \int_{\tau_0}^t \left[\frac{\partial(t-\tau)}{3K(t-\tau^*(r))} - K_3(t-\tau^*(r), \tau-\tau^*(r)) \right] \sigma_{il}(\tau) d\tau = \\ &= \int_0^\infty K_3^0(t-\tau^*(r), \tau-\tau^*(r)) \sigma_{il}(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь ядра K_1^0 и K_3^0 предполагаются равными нулю вне интервала интегрирования $\tau_0 \div t$.

Представим (3) следующим образом:

$$s_{ij} = \int_{\tau_0}^t [\text{Res}_1(t-\tau^*(r), \tau-\tau^*(r)) + 2G(t_*) \partial(t-\tau)] e_{ij}(\tau) d\tau =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^t \text{Res}_1(t-\tau^*(r), \tau-\tau^*(r)) e_{II}(\tau) d\tau; \\
\sigma_{II}(t) &= \int_{\tau_0}^t [\text{Res}_3(t-\tau^*(r), \tau-\tau^*(r)) + K'(t_*) \delta(t-\tau)] \varepsilon_{II}(\tau) d\tau = \\
&= \int_{\tau_0}^t \text{Res}_3^0(t-\tau^*(r), \tau-\tau^*(r)) \varepsilon_{II}(\tau) d\tau,
\end{aligned} \tag{5}$$

где ядра Res_1^0 и Res_3^0 равны нулю вне интервала $\tau_0 \div t$.

Из равенств (4) и (5) следует:

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty K_1^0(t-\tau^*(r), \tau-\tau^*(r)) \text{Res}_1^0(\tau-\tau^*(r), \tau'-\tau^*(r)) d\tau = \delta(t-\tau'), \\
&\int_0^\infty K_3^0(t-\tau^*(r), \tau-\tau^*(r)) \text{Res}_3^0(\tau-\tau^*(r), \tau'-\tau^*(r)) d\tau = \delta(t-\tau').
\end{aligned} \tag{6}$$

Здесь $\delta(t-\tau')$ — дельта-функция Дирака.

Теорема 1. Краевая задача (1) с определяющими соотношениями

$$\begin{aligned}
e_{II}(t) &= \int_0^\infty K_1^0(t-\tau^*(r), \tau-\tau^*(r)) s_{II}(\tau) d\tau + \int_0^\infty K_2^0(t-\tau^*(r), \tau-\tau^*(r)) s_{mn}(\tau) \times \\
&\times s_{mn}(\tau) s_{II}(\tau) d\tau; \quad \varepsilon_{II}(t) = \int_0^\infty K_3^0(t-\tau^*(r), \tau-\tau^*(r)) \varepsilon_{II}(\tau) d\tau
\end{aligned} \tag{7}$$

интегральным преобразованием с ядром $\text{Res}_1^0(\tau'-\tau^*(r), t-\tau^*(r))$ при условии, что выполняются равенства.

$$K_2^0(t-\tau^*(r), \tau-\tau^*(r)) = K_2'(\tau-\tau^*(r)) K_1^0(t-\tau^*(r), \tau-\tau^*(r));$$

$$K_3^0(t-\tau^*(r), \tau-\tau^*(r)) = K_3'(\tau-\tau^*(r)) K_1^0(t-\tau^*(r), \tau-\tau^*(r)),$$

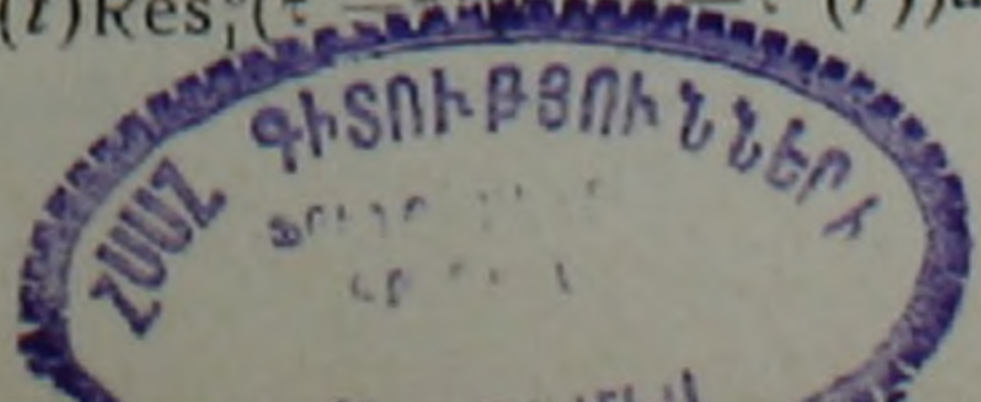
сводится к задаче для неоднородного кубически нелинейного упругого материала.

Доказательство. Умножая определяющее соотношение (7) на $\text{Res}_1^0(\tau'-\tau^*(r), t-\tau^*(r))$, интегрируя по времени t , согласно (6) будем иметь:

$$\begin{aligned}
e_{II}^{(*)}(\tau') &= s_{II}(\tau') + K_2'(\tau'-\tau^*(r)) s_{mn}(\tau') s_{mn}(\tau') s_{II}(\tau'); \\
\varepsilon_{II}^{(*)}(\tau') &= K_3'(\tau'-\tau^*(r)) \varepsilon_{II}(\tau').
\end{aligned} \tag{8}$$

Преобразуя краевые условия в перемещения и соотношения Коши:

$$\varepsilon_{II}^{(*)}(\tau') = \int_0^\infty \varepsilon_{II}(t) \text{Res}_1^0(\tau'-\tau^*(r), t-\tau^*(r)) dt = \frac{1}{2} \{u_{I,I}^{(*)} + u_{J,I}^{(*)}\},$$



$$u_{i,j}^{(*)} = \int_0^t u_{i,j}(t) \text{Res}_0(\tau' - \tau^*(r), t - \tau^*(r)) dt, \quad (9)$$

в образах преобразований будем иметь краевую задачу для неоднородно-стареющего упругого кубически нелинейного материала:

$$\begin{aligned} \sigma_{ii,j} + X_i &= 0; \quad \varepsilon_{ij}^{(*)} = \frac{1}{2} \{u_{i,j}^{(*)} + u_{j,i}^{(*)}\}; \\ e_{ij}^{(*)}(\tau') &= s_{ij}(\tau') + K_2(\tau' - \tau^*(r)) s_{mn}(\tau') s_{mn}(\tau') s_{ij}(\tau); \\ \varepsilon_{ii}^{(*)}(\tau') &= K_3(\tau' - \tau^*(r)) \sigma_{ii}(\tau'); \\ \sigma_{ij} n_j &= P_i, \quad x \in S_\sigma; \quad u_i^{(*)} = u_i^{0(*)}, \quad x \in S_u. \end{aligned} \quad (10)$$

В качестве примера рассмотрим задачу об изгибе кубически нелинейной неоднородно-стареющей балки. Балка изгибается противоположными моментами $\pm M(t)$, приложенными к ее торцам. Боковая поверхность свободна от нагрузок. Краевая задача для данного случая в соответствии с теоремой 1 определяется формулами (10). Согласно (10) решения — напряжения исходной вязкоупругой задачи и фиктивно упругой задачи (10) совпадают. Поэтому разница между вязкоупругой задачей (1) и фиктивно упругой задачей (10) будет заключаться только в деформациях и перемещениях.

Уравнения равновесия и краевые условия задачи (10) и исходной вязкоупругой задачи будут удовлетворены, если решения выбраны в виде

$$\sigma_{xy} = \sigma_{xz} = \sigma_{yy} = \sigma_{yz} = \sigma_{zz} = 0; \quad \sigma_{xx} = -\frac{M(t)}{J} y. \quad (11)$$

Здесь J — момент инерции поперечного сечения.

Из (11) имеем

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= -\frac{M(t)y}{JE(t - \tau^*(r))} + \int_{\tau_0}^t y \frac{M(t)}{J} K_E(t - \tau^*(r), \tau - \tau^*(r)) d\tau + \\ &+ \int_{\tau_0}^t \frac{M^2(\tau)}{J^2} y^3 K_{2E}(t - \tau^*(r), \tau - \tau^*(r)) d\tau. \end{aligned} \quad (12)$$

Уравнения совместности деформаций выполняются приближенно. На рис. 1 и 2 представлены графики зависимостей ε_{xx} от x и y для различных моментов нагружения и наблюдения в случае $M(t) = M_0$, причем $M_0/J = 1 \text{ кгс/см}^2$. Функция $K_E(t - \tau^*(r), \tau - \tau^*(r))$ согласно (3) равна $\frac{\partial}{\partial \tau} \{1/E(\tau - \tau^*(r)) + C(t, \tau, \tau^*(r))\}$, причем $E(\tau - \tau^*(r)) = E_0 \{1 - \exp[-\beta(\tau - \tau^*(r))]\}$, а $C(t, \tau, \tau^*(r)) = \{C_1 + A_1/|\tau - \tau^*(r)|\} \{1 - \exp[-\gamma(t - \tau)]\}$. Постоянные для бетона составляют:

$$\begin{aligned} C_1 &\approx 0,975 \cdot 10^{-5} (\text{кгс/см}^2)^{-1}, \quad A_1 = 4,62 \cdot 10^{-5} \text{ сут./}(\text{кгс/см}^2), \\ \gamma &= 0,03 \text{ сут.}^{-1}, \quad E_0 = 2,6 \cdot 10^5 \text{ кгс/см}^2, \quad \beta = 0,206 \text{ сут.}^{-1} \end{aligned}$$

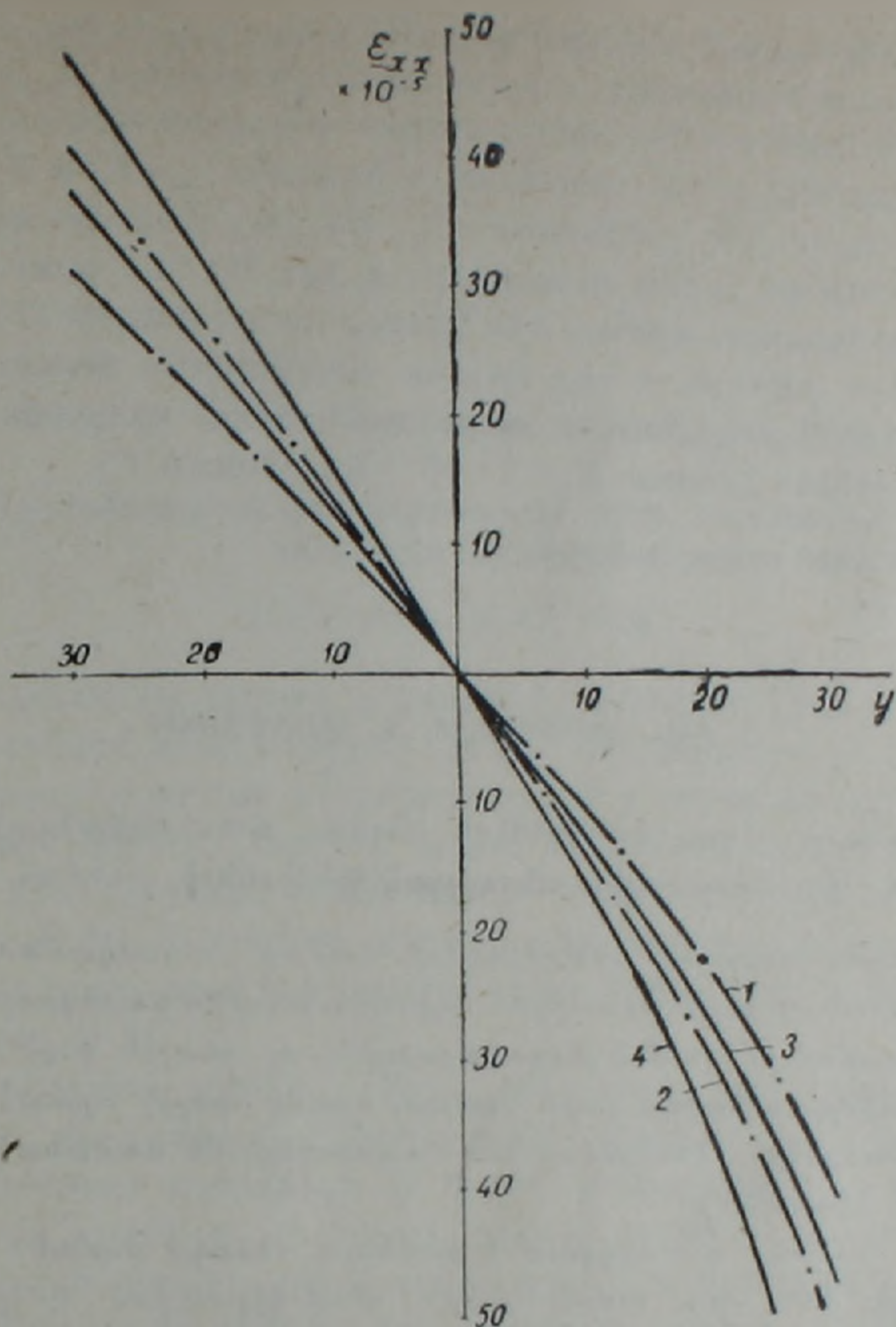


Рис. 1. График деформации балки ϵ_{xx} в зависимости от y для $x=0$ (— · —), $x=5$ м (—); 1— $x=0$, $\tau_0=20$, $t=50$ сут.; 2— $x=0$, $\tau_0=20$, $t=80$ сут.; 3— $x=500$ см., $\tau_0=20$, $t=50$ сут.; 4— $x=500$ см., $\tau_0=20$, $t=80$ сут.

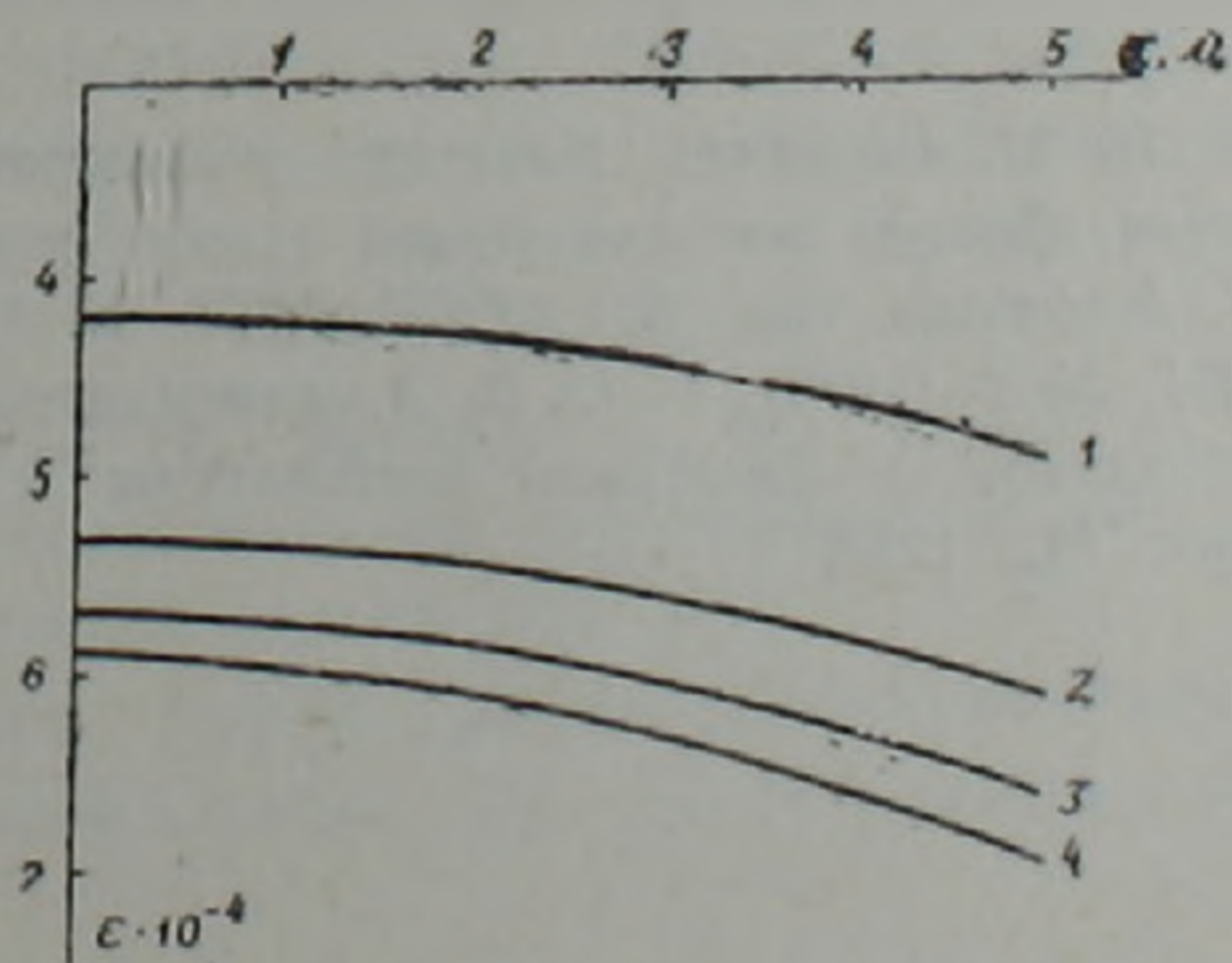


Рис. 2. График деформации балки ϵ_{xx} в зависимости от x для $y=30$ см и момента, нагружения 20 суток: 1— $\tau_0=20$, $t=50$ сут.; $y=30$ см; 2— $\tau_0=20$, $t=80$ сут., $y=30$ см; 3— $\tau_0=20$, $t=110$ сут., $y=30$ см; 4— $\tau_0=20$, $t=140$ сут., $y=30$ см

Длина балки составляет 5 м, а сечение — квадрат со стороной 60 см. Балка изготавливается с постоянной скоростью за 10 дней, наращиваясь по оси x . На рис. 1 изображена зависимость деформации ε_{xx} от координаты y для моментов загрузки $\tau_0 = 20$ и 50 суток для различных моментов наблюдения t . На рис. 2 изображены зависимости деформации ε_{xx} от координаты x для тех же моментов нагружения и наблюдения, причем при растяжении согласно (5) считается, что связь $\sigma - \varepsilon$ линейна, а при сжатии — кубически нелинейна. Коэффициент пропорциональности ядра кубически нелинейного и ядра линейного выбран равным $K' = 3 \cdot 10^{-4}$ по данным (5).

Куйбышевский государственный
университет

Դ. ՅՈՒ. ԵՐԾՈՒՆԿՈՒ. Վ. Վ. ԿՈՆՎՈԼՉԻՆՈՎ

Անհամասեռ ծեղացող մարմինների համար առաձգամածուցիկության
գլխավոր խորանարդային տեսության խնդիրների լուծման մասին

Անհամասեռ ծեղացող մարմինների համար առաձգամածուցիկության
գլխավոր խորանարդային տեսության եզրային խնդիրը ինտեգրալ ձևափոխու-
թյան կիրառումով բերվում է խորանարդային ոչ գծային կեղծ առաձգակա-
նության նյութերի այնպիսի դասի համար, որտեղ որոշիչ արտահայտություն-
ների օպերատորների կորիզները բազմապատկելի են ժամանակի միևնույն
ֆունկցիայի նկատմամբ:

Որպես օրինակ դիտարկվում է բետոնյա հեծանի ծոման վերաբերյալ
խնդիրը, երբ ծոող բեռը ուժագույգերի ձևով կիրառված է հիմքերի վրա:
Ընդունվում է, որ հեծանի նյութը ձգման ժամանակ իրեն պահում է որպես
ղծային, իսկ սեղման ժամանակ՝ որպես ոչ գծային:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ А. А. Ильюшин, П. М. Огибалов, Механика полимеров, № 3, 1965. ² А. А. Ильюшин, Б. Е. Победря, Основы математической теории термовязкоупругости, На-
ука, М., 1970. ³ Н. Х. Арутюнян, Изв. АН СССР. МТТ, № 3, 1976. ⁴ Н. Х. Арутю-
нян, ДАН СССР, т. 231, № 3 (1976). ⁵ С. В. Александровский, Расчет бетонных и
железобетонных конструкций на изменение температуры и влажности с учетом
ползучести, Стройиздат, М., 1973.