ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXVIII 1984 4

УДК 519.4

МАТЕМАТИКА

А. Г. Далалян

# Об исключаемости слов

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. Р. Варшамовым 18/II 1983)

Пусть $X$ есть слово в алфавите $\Omega_n=\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Слово $E$ в алфавите $\Psi_m=\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ назовем словом вида $X$, если $E$ есть результат подстановки вместо букв слова $X$ некоторых непустых слов в алфавите $\Psi_m$, причем вместо одинаковых букв подставляются одинаковые слова. Следуя [1] дадим

Определение. Слово $X$ в алфавите $\Omega_n$ называется исключаемым в алфавите $\Psi_m$, если в алфавите $\Psi_m$ существует такое бесконечное множество различных слов, что никакое из них не содержит подслова вида $X$.

Слово $X$ [1] в алфавите $\Omega_n$ называется дублированным, если каждая буква $x_i$ при $1\leqslant i\leqslant n$ входит в $X$ минимум два раза. Слово $X$ в алфавите $\Omega_n$ назовем тройным, если каждая буква $x_i$ при $1\leqslant i\leqslant n$ входит в $X$ минимум три раза.

В настоящей работе будут доказаны следующие утверждения.

Утверждение 1. Каждое дублированное слово исключаемо в алфавите $\Psi_4$.

Утверждение 2. Каждое дублированное слово в алфавите $\Omega_n$, где $n\geqslant 6$, исключаемо в алфавите $\Psi_3$.

Утверждение 3. Каждое тройное слово в алфавите $\Omega_n$, где $n\geqslant 4$, исключаемо в алфавите $\Psi_2$.

Пусть $X$ есть слово в алфавите $\Omega_n$, причем буква $x_i$ входит в слово $X$ ровно $r_i$ раз при $i=1, 2, \ldots, n$. Будем считать, что $r=\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{r_i\}\geqslant 2$. (Очевидно, что если $r=2$, то слово $X$ дублированное, и если $r=3$, то $X$—тройное.) Через $\gamma_m(l)$ обозначим количество слов длины $l$ в алфавите $\Psi_m$, которые не содержат подслов вида $X$. Через $\beta_{l_1, l_2, \ldots, l_n}(l)$ обозначим количество слов длины $l$ в алфавите $\Psi_m$, которые при вычеркивании последней буквы не содержат подслов вида $X$, но сами содержат подслово вида $X$, причем это подслово получается из слова $X$ подстановкой вместо буквы $x_i$ некоторого слова длины $l_i$ в алфавите $\Psi_m$, где $i=1, 2, \ldots, n$.
Очевидно, что

$$\gamma_m(l)\geqslant\gamma_m(l-1)m-\sum_{l_1+l_2+\ldots+l_n<l}^{l}\beta_{l_1, l_2, \ldots, l_n}(l)=$$

$$=\gamma_m(l-1)m-\sum_{j=n}^{l}\Big(\sum_{l_1+l_2+\ldots+l_n=j}\beta_{l_1, l_2, \ldots, l_n}(l)\Big).$$

Легко убедиться, что

$$\beta_{l_1, l_2, \ldots, l_n}(l) \leqslant \gamma_m\Big(l - \sum_{i=1}^{n} r_i l_i\Big) m^{l_1} m^{l_2} \ldots m^{l_n},$$

$$\gamma_m(l) \geqslant \gamma_m(l-1)m - \sum_{j=n}^{l}\Big(\sum_{l_1+l_2+\ldots+l_n=j} \gamma_m\Big(l - \sum_{i=1}^{n} r_i l_i\Big) m^{l_1+l_2+\ldots+l_n}\Big).$$

Всякому $m$ мы сопоставим некоторое число $\alpha$, $\sqrt{m}<\alpha<m$, такое, что индукцией по $l$ можно будет доказать соотношение $\gamma_m(l) \geqslant \alpha\gamma_m(l-1)$. Очевидно, что база индукции верна при $\sqrt{m}<\alpha<m$. Допустим, что утверждение верно при любых натуральных числах, меньших $l$. По индуктивному предположению

$$\gamma_m\Big(l - \sum_{i=1}^{n} r_i l_i\Big) \leqslant \gamma_m\Big(l - r\sum_{i=1}^{n} l_i\Big).$$

Тогда

$$\sum_{j=n}^{l}\Big(\sum_{l_1+l_2+\ldots+l_n=j} \gamma_m\Big(l - \sum_{i=1}^{n} r_i l_i\Big) m^{l_1+l_2+\ldots+l_n}\Big) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=n}^{l}\Big(\sum_{l_1+l_2+\ldots+l_n=i} \gamma_m\Big(l - r\sum_{i=1}^{n} l_i\Big) m^{l_1+l_2+\ldots+l_n} = \sum_{i=n}^{l}\binom{i-1}{n-1}\gamma_m(l-ri)m^{i}\Big),$$

где $\binom{i-1}{n-1}$ есть число сочетаний из $i-1$ по $n-1$ и равно количеству всевозможных упорядоченных наборов целых положительных чисел $(l_1, l_2, \ldots, l_n)$ таких, что $l_1+l_2+\ldots+l_n=i$. По индуктивному предположению $\gamma_m(l-1) \geqslant \alpha^{ri-1}\gamma_m(l-ri)$.

Значит

$$\gamma_m(l) \geqslant \gamma_m(l-1)\Big(m - \alpha\sum_{i=n}^{l}\binom{i-1}{n-1}\Big(\frac{m}{\alpha^r}\Big)^i\Big) \geqslant$$

$$\geqslant \gamma_m(l-1)\Big(m - \alpha\sum_{i=n}^{\infty}\binom{i-1}{n-1}\Big(\frac{m}{\alpha^r}\Big)^i\Big).$$

Заметим, что при $\alpha>\sqrt{m}$ и $r \geqslant 2$ ряд $\sum_{i=n}^{\infty}\binom{i-1}{n-1}\Big(\frac{m}{\alpha^r}\Big)^i$ сходится.

Вычислим сумму ряда $\sum_{i=n}^{\infty}\binom{i-1}{n-1}x^i$ при $0<x<1$.

$$\sum_{i=n}^{\infty}\binom{i-1}{n-1}x^i = \sum_{i=n}^{\infty}\frac{(i-1)(i-2)\ldots(i-n+1)}{(n-1)!}x^i =$$

$$= \frac{\Big(\sum_{i=1}^{\infty}x^{i-1}\Big)^{(n-1)} x^n}{(n-1)!} = \frac{\Big(\frac{1}{1-x}\Big)^{(n-1)} x^n}{(n-1)!} = \frac{x^n}{(1-x)^n}.$$

Значит

$$\gamma_m(l) \geqslant \gamma_m(l-1)\Big(m - \frac{\alpha m^n}{(\alpha^r - m)^n}\Big).$$

Для завершения доказательства надо найти такие значения $m$, $\alpha$, $n$, $r$, чтобы выполнялось неравенство

$$m-\frac{\alpha m^n}{(\alpha^r-m)^n}\geqslant\alpha.$$

Нетрудно убедиться, что при $m=4$, $r=2$, $n\geqslant 3$, $\alpha=\sqrt{12}$;

$m=3$, $r=2$, $n\geqslant 6$, $\alpha=2\sqrt{2}$; $m=2$, $r=3$, $n\geqslant 4$, $\alpha=\sqrt[3]{6}$

соответствующие неравенства выполняются. Отсюда непосредственно следуют утверждения 2 и 3.

Для завершения доказательства утверждения 1 достаточно заметить, что любое дублированное слово в алфавите $\Omega_1$ или $\Omega_2$ содержит квадрат некоторого слова, а слово $x_1^2$ исключаемо в алфавите $\Psi_3$ ([2]).

Вычислительный центр
Академии наук Армянской ССР
и Ереванского государственного
университета

Ա. Հ. ԴԱԼԱԼՅԱՆ

## Բառերի բացառելիության մասին

*$\Omega_n=\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ այբուբենի $X$ բառը կոչվում է բացառելի ([1]) $\Psi_m=\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ այբուբենում, եթե $\Psi_m$ այբուբենում գոյություն ունի տարրեր բառերի այնպիսի անվերջ բազմություն, որոնցից յուրաքանչյուրը չի պարունակում ենթաբառ, որը ստացվում է $X$ բառի տառերի փոխարեն $\Psi_m$ այբուբենի որոշ ոչ դատարկ բառերի տեղադրումից: $X$ բառը կոչվում է կրկնօրինակված, եթե յուրաքանչյուր $x_i$ տառը $1\leqslant i\leqslant n$ դեպքում $X$ բառում պարունակվում է մինիմում երկու անգամ և եռօրինակված, եթե յուրաքանչյուր $x_i$ տառը $1\leqslant i\leqslant n$ դեպքում $X$ բառում պարունակվում է մինիմում) երեք անգամ:*

*Այս աշխատանքում ապացուցվում է, որ յուրաքանչյուր կրկնօրինակված բառ բացառելի է չորս տառանի այբուբենում, յուրաքանչյուր կրկնօրինակված բառ ավելի քան հինգ տառից բաղկացած այբուբենում բացառելի է երեքտառանի այբուբենում և յուրաքանչյուր եռօրինակված բառ ավելի քան երեք տառից բաղկացած այբուբենում բացառելի է երկտառանի այբուբենում:*

### ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *D. R. Bean, A. Ehrenfeucht, G. F. McNulty,* Pacific Journ. of Math., v. 85 № 2 (1979). [2] *A. Thue,* Norske Vid. Selek. Skr., I Mat. Nat. Kl., Christiania, 7 (1906.