ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXVIII 1984 4

УДК 517.98

МАТЕМАТИКА

П. Э. Мелик-Адамян

К теории S-матриц канонических дифференциальных операторов

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. А. Александряном 11/II 1983)

Пусть $\mathscr{H}$—сепарабельное гильбертово пространство, $[\mathscr{H}]$—кольцо линейных ограниченных операторов, действующих в $\mathscr{H}$, и $\mathscr{J}$—оператор в $\mathscr{H}$, со свойствами $\mathscr{J}^*=-\mathscr{J}$, $\mathscr{J}^2=-I$. Операторы $P_\pm=$ $=\frac{1}{2}(I\mp i\mathscr{J})$ являются взаимно дополнительными ортогональными проекторами на собственные подпространства $\mathscr{H}_\pm=\{h\in\mathscr{H};\ \mathscr{J}h=\pm ih\}$, так что $\mathscr{J}=iP_+-iP_-$, причем предполагается, что $\dim\mathscr{H}_+=\dim\mathscr{H}_-$.

Обозначим через $H(r)$, $(0\leqslant r<\infty)$—операторнозначную функцию со свойствами: 1) $H(r)$ принимает строго положительные значения $\forall r\in[0,\infty)$; 2) $H(r)$ дифференцируема в том смысле, что имеет место представление $H(r)=I+\int\limits_0^r\frac{dH(t)}{dt}dt$, где $\frac{dH(t)}{dt}$—сильно измеримая функция, интегрируемая по Бохнеру на $[0,\infty)$; 3) $H(r)$—$\mathscr{J}$-унитарна, т. е. $H(r)\mathscr{J}H(r)=\mathscr{J}$.

Через $L_2^{(H)}(0,\infty;\mathscr{H})$ обозначим гильбертово пространство сильно измеримых на $[0,\infty)$ векторных функций (со значениями из $\mathscr{H}$) со скалярным произведением

$$(x,y)_H=\int\limits_0^\infty(H(r)x(r),\ y(r))dr=\int\limits_0^\infty(H^{\frac{1}{2}}(r)x(r),\ H^{\frac{1}{2}}(r)y(r))dr.$$

В $L_2^{(H)}(0,\infty;\mathscr{H})$ рассмотрим минимальный симметрический оператор $\mathscr{L}_0$, задаваемый дифференциальным выражением

$$H^{-1}(r)\mathscr{J}\frac{d}{dr}\tag{1}$$

на области определения $\mathscr{D}(\mathscr{L}_0)$, состоящей из финитных $(x(0)=0$, $x(r)=0$ при $r>R_x)$ абсолютно непрерывных функций $x(r)$ таких, что

$$H^{-1}(r)\mathscr{J}\frac{dx(r)}{dr}\in L_2^{(H)}(0,\infty;\ \mathscr{H}).\tag{2}$$

Как и в [1], можно показать, что каждое самосопряженное расширение $\mathscr{L}_K$ оператора $\mathscr{L}_0$ определяется дифференциальным выражением (1) и областью определения $\mathscr{D}(\mathscr{L}_K)$, состоящей из абсолютно непрерывных функций, удовлетворяющих условию (2) и граничному условию

$$x(0)=P_K x(0). \tag{3}$$

Здесь P_K — проектор на гипермаксимальное $(i\mathcal{J})$-нейтральное подпространство $\mathcal{H}_K=\{h\in\mathcal{H};\ KP_+h=P_-h\}$, K — произвольный частично изометрический оператор ($K^*K=P_+$, $KK^*=P_-$), существующий в силу $\dim\mathcal{H}_+=\dim\mathcal{H}_-$.

Настоящая заметка посвящена рассмотрению некоторых вопросов теории S-матриц для оператора $\mathcal{L}_K$. Основные положения спектральной теории и теории S-матриц для оператора $\mathcal{L}_K$ изучались в [2,3] в случае, когда функция $H(r)$ удовлетворяет условиям, отличным от наших. Этим обусловлен различный характер возмущений, рассматриваемых в [2,3] и здесь, поэтому в части, относящейся к теории S-матрицы, мы следуем работе [4].

1. Пусть $\mathrm{E}(r,\lambda)$ — операторное решение (оператор Коши) задачи

$$H^{-1}(r)\mathcal{J}\frac{d\mathrm{E}(r,\lambda)}{dr}=\lambda\mathrm{E}(r,\lambda),\ \ \mathrm{E}(0,\lambda)=I,\ \ \mathrm{Im}\lambda=0, \tag{4}$$

которое единственным образом определяется из интегрального уравнения

$$\mathrm{E}(r,\lambda)=H^{-\frac{1}{2}}(r)e^{-\mathcal{J}\lambda r}\left(I+\int_0^r e^{\mathcal{J}\lambda s}\frac{dH^{\frac{1}{2}}(s)}{ds}\,\mathrm{E}(s,\lambda)ds\right). \tag{5}$$

Функция $\mathrm{E}(r,\lambda)$ $\mathcal{J}$-унитарна при $\mathrm{Im}\lambda=0$. Для функции $\mathcal{A}(r,\lambda)=e^{\mathcal{J}\lambda r}H^{\frac{1}{2}}(r)\mathrm{E}(r,\lambda)$ имеем

$$\mathcal{A}(r,\lambda)=I+\int_0^r e^{\mathcal{J}\lambda s}\frac{dH^{\frac{1}{2}}(s)}{ds}H^{-\frac{1}{2}}(s)e^{-\mathcal{J}\lambda s}\mathcal{A}(s,\lambda)ds. \tag{6}$$

Из положительности функции $H(r)$ следует единственность решения операторного уравнения $H^{-\frac{1}{2}}(r)X(r)+X(r)H^{-\frac{1}{2}}(r)=H^{-1}(r)\dfrac{dH(r)}{dr}H^{-1}(r)$ (см. [5]), поэтому имеет место $\dfrac{dH^{\frac{1}{2}}(r)}{dr}H^{-\frac{1}{2}}(r)=H^{-\frac{1}{2}}(r)\dfrac{dH^{\frac{1}{2}}(r)}{dr}$ и уравнение (6) можно переписать в виде

$$\mathcal{A}(r,\lambda)=I+\int_0^r e^{2\mathcal{J}\lambda s}\frac{dH^{\frac{1}{2}}(s)}{ds}H^{-\frac{1}{2}}(s)\mathcal{A}(s,\lambda)ds. \tag{7}$$

Поскольку функция $\dfrac{dH^{\frac{1}{2}}(s)}{ds}H^{-\frac{1}{2}}(s)$ суммируема, то существует предел $\lim\limits_{r\to\infty}\mathcal{A}(r,\lambda)=\mathcal{A}(\lambda)$, представимый в виде

$$\mathcal{A}(\lambda)=I+\int_0^\infty e^{\mathcal{J}\lambda t}\Gamma(t)dt,\quad \Gamma(t)\in L_1(0,\infty;[\mathcal{H}]). \tag{8}$$

Как и $\mathrm{E}(r, \lambda)$, функция $\mathcal{A}(\lambda)$ является $\mathcal{J}$-унитарной. Из представления (8) следует, что функции $P_{\pm}\mathcal{A}(\lambda)$ формулами

$$P_{\pm}\mathcal{A}(\lambda)=P_{\pm}+\int_0^{\infty} e^{\pm i\lambda t}P_{\pm}\Gamma(t)dt, \quad \lambda\in\Pi_{\pm} \tag{9}$$

аналитически продолжаются соответственно в верхнюю и нижнюю полуплоскости $\Pi_{\pm}$. Рассмотрим операторную функцию $\Delta_K(\lambda)=$ $=[(P_K\mathcal{A}^*(\lambda)\mathcal{A}(\lambda)P_K)|_{\mathcal{H}_K}]^{-1}$ и пусть $\Delta(\lambda)=2P_+\Delta_K(\lambda)P_+$. Обозначим через $L_2^{(\Delta)}(-\infty, \infty; \mathcal{H}_+)$ гильбертово пространство сильно измеримых на $(-\infty, \infty)$ векторных функций со значениями из $\mathcal{H}_+$ и скалярным произведением $(f, g)_\Delta=\int\limits_{-\infty}^{\infty}(\Delta(\lambda)f(\lambda), g(\lambda))d\lambda$. Обозначим $\Phi(r, \lambda)=$ $=\sqrt{2}H^{-\frac{1}{2}}(r)\mathrm{E}(r, \lambda)P_K P_+$. Формулами

$$f(\lambda)=\underset{R\to\infty}{\mathrm{l.i.m}}\int_0^R \Phi^*(r, \lambda)H(r)x(r)dr, \quad x(r)\in L_2^{(H)}(0, \infty; \mathcal{H}), \tag{10}$$

$$x(r)=\underset{R\to\infty}{\mathrm{l.i.m}}\frac{1}{\pi}\int_{-R}^{R}\Phi(r, \lambda)\Delta(\lambda)f(\lambda)d\lambda, \quad f(\lambda)\in L_2^{(\Delta)}(-\infty, \infty); \mathcal{H}_+)$$

определяются взаимно-обратные изометрические отображения соответственно пространств $L_2^{(H)}$ на $L_2^{(\Delta)}$ и $L_2^{(\Delta)}$ на $L_2^{(H)}$, переводящие друг в друга оператор $\mathcal{L}_K$ и оператор умножения на независимую переменную, т. е. этими формулами определяется спектральное представление оператора $\mathcal{L}_K$.

2. В пространстве $L_2^{(H)}(0, \infty; \mathcal{H})$ определим самосопряженный оператор $\mathcal{L}_K^0$ дифференциальным выражением $H^{-1}(r)\mathcal{J}\dfrac{d}{dr}+$ $+H^{-\frac{1}{2}}(r)\mathcal{J}\dfrac{dH^{\frac{1}{2}}(r)}{dr}$ на множестве абсолютно непрерывных функций (r), удовлетворяющих условию (3) и таких, что $H^{-1}(r)\mathcal{J}\dfrac{dx(r)}{dr}+$ $+H^{-\frac{1}{2}}(r)\mathcal{J}\dfrac{dH^{\frac{1}{2}}(r)}{dr}x(r)\in L_2^{(H)}(0, \infty; \mathcal{H})$.

Оператор $\mathcal{L}_K$ будем рассматривать как возмущенный относительно $\mathcal{L}_K^0$. Обозначив через $\mathrm{E}_0(r, \lambda)=H^{-\frac{1}{2}}(r)e^{-\mathcal{J}\lambda r}$ оператор Коши, отвечающий оператору $\mathcal{L}_K^0$, аналогично формулам (10) можно построить спектральное представление оператора $\mathcal{L}_K^0$ со спектральной плотностью $\Delta_0(\lambda)=I|_{\mathcal{H}_+}$. Используя спектральные представления операторов $\mathcal{L}_K^0$ и $\mathcal{L}_K$, можно доказать существование волновых операторов

$$W_{\pm}(\mathcal{L}_K, \mathcal{L}_K^0)=s-\lim_{t\to\pm\infty}\exp(i\mathcal{L}_K t)\exp(-i\mathcal{L}_K^0 t).$$

Теорема 1. *Оператор рассеяния* $S(\mathcal{L}_K, \mathcal{L}_K^0)=W_+^*(\mathcal{L}_K, \mathcal{L}_K^0)W_-(\mathcal{L}_K, \mathcal{L}_K^0)$ *существует, и в спектральном представлении невозмущенного оператора* $\mathcal{L}_K^0$ *его действие определяется формулами*

$$(S(\mathcal{L}_K, \mathcal{L}_K^*)x)(r) = \underset{R\to\infty}{\mathrm{l.i.m}} \frac{1}{\pi}\int_{-R}^{R} \Phi_0(r, \lambda) S(\lambda) f(\lambda) d\lambda, \quad f(\lambda) = \underset{R\to\infty}{\mathrm{l.i.m}} \int_0^R \Phi_0^*(r, \lambda) x(r) dr,$$

где $\Phi_0(r, \lambda) = \sqrt{2} H^{-1}(r) e^{-\mathcal{J}\lambda r} P_K P_+$, $\quad S(\lambda) = S_-(\lambda) S_+^{-1}(\lambda)$, $\quad$ а $\quad S_\pm(\lambda) = 4 P_+ P_K P_\pm \mathcal{A}(\lambda) P_K P_+$.

Из формул (9) следует, что функции $S_\pm(\lambda)$ представимы в виде

$$S_\pm(\lambda) = I_+ + \int_0^\infty e^{\pm i\lambda t} C_\pm(t) dt, \quad C_\pm(t) \in L_1(0, \infty; [\mathcal{H}_+]), \tag{11}$$

где I_+ — единичный оператор в $\mathcal{H}_+$. Функция $S(\lambda)$ унитарна, что следует из легко проверяемого соотношения

$$\Delta(\lambda) = (S_\pm^*(\lambda) S_\pm(\lambda))^{-1}. \tag{12}$$

3. Пусть $\mathcal{U}(t) = \exp(i\mathcal{L}_K t)$, $(-\infty < t < \infty)$ — группа унитарных операторов, порожденная самосопряженным оператором $\mathcal{L}_K$. Тогда функция $x(r, t) = \mathcal{U}(t) x(r)$ является решением задачи Коши

$$-i\frac{\partial x(r, t)}{\partial t} = H^{-1}(r)\mathcal{J}\frac{\partial x(r, t)}{\partial r}, \; x(r, 0) = x(r), \; (0 \leqslant r < \infty, \; -\infty < t < \infty). \tag{13}$$

Покажем, что к группе $\mathcal{U}(t)$ применима схема теории рассеяния Лакса—Филлипса ([6]). Метод Лакса—Филлипса предполагает, что в пространстве $L_2^{(H)}(0, \infty; \mathcal{H})$ существуют подпространства $D_\pm$ (называемые уходящим и приходящим), обладающие свойствами

I) $\mathcal{U}(\pm t) D_\pm \subset D_\pm$, $t > 0$, $\quad$ II) $\bigcap\limits_{t>0} \mathcal{U}(\pm t) D_\pm = \{0\}$,

III) $\overline{\bigcup\limits_t \mathcal{U}(t) D_\pm} = L_2^{(H)}(0, \infty; \mathcal{H})$.

Для выделения подпространств $D_\pm$ заметим, что поскольку имеют место соотношения (12), то функция $g(\lambda) = S_\pm^{*-1}(\lambda) f(\lambda) \in L_2(-\infty, \infty; \mathcal{H}_+)$ при $f(\lambda) \in L_2^{(\Delta)}(-\infty, \infty; \mathcal{H}_+)$. Обозначив $\Phi_\pm(r, \lambda) = \Phi(r, \lambda) S_\pm^{-1}(\lambda)$, из формул (10) получим два различных спектральных представления оператора $\mathcal{L}_K$ в $L_2(-\infty, \infty; \mathcal{H}_+)$, определяемые формулами

$$g(\lambda) = \underset{R\to\infty}{\mathrm{l.i.m}} \frac{1}{\pi}\int_0^R \Phi_\pm^*(r, \lambda) H(r) x(r) dr, \quad x(r) \in L_2^{(H)}(0, \infty; \mathcal{H}),$$

$$x(r) = \underset{R\to\infty}{\mathrm{l.i.m}} \int_{-R}^{R} \Phi_\pm(r, \lambda) g(\lambda) d\lambda, \quad g(\lambda) \in L_2(-\infty, \infty; \mathcal{H}_+). \tag{$14_\pm$}$$

Обозначим через $H_2^\pm(-\infty, \infty; \mathcal{H}_+) \subset L_2(-\infty, \infty; \mathcal{H}_+)$ классы голоморфных в $\Pi_\pm$ векторных функций $f_\pm(\lambda)$, представимых в виде

$$f_\pm(\lambda) = \int_0^\infty e^{\pm i\lambda t} \varphi(t) dt, \quad \varphi(t) \in L_2(0, \infty; \mathcal{H}_+), \quad \lambda \in \Pi_\pm.$$

Если в качестве уходящего и приходящего подпространств относительно группы операторов умножения на $e^{i\lambda t}$ в $L_2(-\infty, \infty; \mathcal{H})$ выбраны подпространства $H_2^{\pm}(-\infty, \infty; \mathcal{H})$, то для них выполнение соотношений I)—III) очевидно. Обозначим через $D_{\pm} \subset L_2^{(H)}(0, \infty; \mathcal{H})$ образы подпространств $H_2^{\pm}(-\infty, \infty; \mathcal{H})$ при отображениях $(14_{\pm})$. Поскольку эти отображения изометричны и группа $U(t)$ ими переходит в группу операторов умножения на $e^{i\lambda t}$, то отсюда следуют соотношения I)—III) и для подпространств $D_{\pm}$. Подпространства $D_{\pm}$ допускают и внутреннюю характеристику. Именно, используя свойства функций $S_{\pm}(\lambda)$, в частности, их представимость формулами (11), можно доказать, что справедлива

Теорема 2. *Подпространства $D_{\pm}$ совпадают с подпространствами начальных данных задачи Коши* (13) *таких, что отвечающие им решения обращаются в нуль соответственно при* $t>r$, $t>0$ и $-t>r$, $t<0$.

Отображения $(14_{\pm})$ называются уходящим и приходящим спектральными представлениями группы $U(t)$. Методом Лакса—Филлипса матрица рассеяния определяется как оператор, переводящий уходящий представитель функции $x(r) \in L_2^{(H)}(0, \infty; \mathcal{H})$ в его приходящий представитель. Из формул $(14_{\pm})$ и унитарности функции $S(\lambda)$ следует, что это соответствие осуществляется функцией $S(\lambda) = S_-(\lambda) S_+^{-1}(\lambda)$.

Ереванский государственный
университет

Պ. Է. ՄԵԼԻՔ-ԱԴԱՄՅԱՆ

Կանոնական դիֆերենցիալ օպերատորների S-մատրիցների տեսության մասին

Աշխատանքը նվիրված է $L_2^{(H)}(0, \infty; \mathcal{H})$ տարածության մեջ (1)—(3) բանաձևերով որոշված ինքնահամալուծ $\mathfrak{L}_K$ կանոնական դիֆերենցիալ օպերատորների S-մատրիցների տեսության որոշ հարցերին։ Ենթադրվում է, որ $H(r)$ օպերատորարժեք ֆունկցիան օժտված է 1)—3) հատկություններով։

Ցույց է տրված, որ $\mathfrak{L}_K$ օպերատորի համար գոյություն ունեն S—մատրիցները՝ սահմանված ինչպես ալիքային օպերատորների օգնությամբ, այնպես էլ Լաքս—Ֆիլիպսի մեթոդով։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Ф. Э. Мелик-Адамян*, Изв. АН АрмССР. Математика, т. 12, № 6 (1977). [2] *В. М. Адамян, М. Т. Яворский*, ДАН АрмССР, т. 56, № 2 (1973). [3] *М. Т. Яворский*, Функциональный анализ. Межвуз. сб., Ульяновск, 1981. [4] *П. Э. Мелик-Адамян*, Изв. АН АрмССР. Математика, т. 11, № 4 (1976). [5] *Ю. Л. Далецкий, М. Г. Крейн*. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. Наука, М., 1970. [6] *П. Лакс, Р. Филлипс*, Теория рассеяния. Мир, М., 1971.