ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXVIII 1984 4

УДК 519.854.2

МАТЕМАТИКА

М. П. Дорофеева, Б. П. Овсянкин, А. В. Смирнов

О многопроцессорных расписаниях, соблюдающих директивные сроки

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. Р. Варшамовым 6/XII 1982)

Рассматривается вопрос построения расписаний для решения на многопроцессорной вычислительной системе, состоящей из M идентичных процессоров, множества задач $S=\{z_i(b_i, f_i, t_i) : i=\overline{1, N}\}$, где t_i—время решения, а b_i и f_i—директивные сроки начала и окончания решения задачи z_i. Предполагается, что любая задача одновременно может решаться лишь на одном из процессоров, в процессе ее решения допускаются прерывания и все числа b_i, f_i и t_i целые.

Если для любой задачи $z_i \in S$ выполнено условие $0<t_i \leq f_i-b_i$, то множество задач S назовем GM-системой.

Известны различные методы построения некоторых допустимых расписаний для такого рода систем [1]. В настоящей работе описано множество всех допустимых расписаний для данной GM-системы.

Пусть задачи занумерованы по неубыванию f_i. Обозначим минимальное из чисел b_i через a, а максимальное из чисел f_i—через T.

Назовем расписанием $P(t)=(P_1(t), \ldots, P_M(t))$ для GM-системы S, состоящей из задач $z_1, \ldots, z_N$, M кусочно-постоянных и непрерывных справа функций $P_k(t)$, которые заданы на интервале $[a, T]$, могут принимать значения $0, \ldots, N$, причем все точки разрыва целые числа и если $P_j(t)=i$ при некотором t и $i\neq 0$, то $P_l(t)\neq i$, $j, l=\overline{1, N}$.

Расписание $P(t)$ назовем допустимым, если для любого $i \in \{1, \ldots, N\}$ суммарная длина интервалов, на которых функции $P_k(t)$ принимают значение i, равна t_i, причем $P_k^{-1}(i) \subseteq [b_i, f_i]$, $k=\overline{1, M}$. Через $\mathcal{P}(S)$ обозначим множество всех допустимых расписаний для GM-системы S.

Если $\sum\limits_{i=1}^{N} t_i = M(T-a)$, то GM-систему S назовем полной. Не ограничивая общности, можно рассматривать лишь полные GM-системы [2].

Для любого $a<\beta<T$ положим

$$M^\beta(S)=\sum_{z_k \in S} m_k^\beta,$$

где

$$m_k^\beta=\max\{\min\{t_k, \beta-f_k+t_k\}, 0\}, \quad z_k \in S.$$

Из определения чисел $M^{\beta}(S)$ следует

Лемма 1. *Для существования допустимого расписания для GM-системы S необходимо выполнение условия*

$$M^{\beta}(S)\leqslant M(\beta-a) \quad \forall\beta: a<\beta<T.$$

Пусть $P(t)$ является допустимым расписанием для GM-системы S, тогда для любого $a<\beta<T$ через $LP_{\beta}(t)$ обозначим функцию, определенную на интервале $[a, \beta]$, совпадающую при $t\in[a, \beta)$ с функцией $P(t)$ и непрерывную слева в точке β, а через $RP_{\beta}(t)$—функцию, определенную на интервале $[\beta, T]$ и совпадающую на этом интервале с $P(t)$.

Лемма 2. *Пусть $P(t)$ является допустимым расписанием для GM-системы S, тогда для любого $a<\beta<T$ существует единственный целочисленный вектор $x(\beta)=(x_1(\beta), \ldots, x_N(\beta))$, удовлетворяющий следующим условиям:*

$$x_k(\beta)=0 \quad \forall k: b_k\geqslant\beta, \tag{1}$$

$$0\leqslant x_k(\beta)\leqslant\min\{t_k-m_k^{\beta},\ \beta-b_k-m_k^{\beta}\} \quad \forall k: b_k<\beta, \tag{2}$$

$$\sum_{k=1}^{N} x_k(\beta)=M(\beta-a)-M^{\beta}(S), \tag{3}$$

$$\sum_{f_k\leqslant\beta} m_k^{f_i}+\sum_{f_k>\beta}\max\{0,\ m_k^{\beta}+x_k(\beta)-\beta+f_i\}\leqslant M(f_i-a)\ \forall i: f_i<\beta, \tag{4}$$

$$\sum_{f_k>\beta}\max\{0,\ m_k^{f_i}-m_k^{\beta}-x_k(\beta)\}\leqslant M(f_i-\beta) \quad \forall i: f_i>\beta. \tag{5}$$

Доказательство. Пусть $LS(\beta)=\{z_k(\tilde{b}_k, \tilde{f}_k, \tilde{t}_k)\}$, где $LS(\beta)$ содержит все задачи $z_k\in S$, которым на интервале $[a, \beta]$ при расписании $P(t)$ отводится $\tilde{t}_k$ процессорного времени и $\tilde{b}_k=b_k$, $\tilde{f}_k=\min\{f_k, \beta\}$, а $RS(\beta)=\{z_k(\hat{b}_k, \hat{f}_k, \hat{t}_k)\}$, где $RS(\beta)$ содержит все задачи $z_k\in S$, которые еще не решены к моменту времени β при расписании $P(t)$, причем $\hat{b}_k=\max\{b_k, \beta\}$, $\hat{f}_k=f_k$, а $\hat{t}_k$ равно времени, которое необходимо для решения задачи z_k в интервале $[\beta, T]$. Учитывая лемму 1, для $z_k\in LS(\beta)$ имеем $\tilde{t}_k=m_k^{\beta}+x_k(\beta)$, где $x_k(\beta)$—неотрицательные целые числа. Положим $x_k(\beta)=0$, если $z_k\notin LS(\beta)$. Ясно, что вектор $x(\beta)= =(x_1(\beta), \ldots, x_N(\beta))$ удовлетворяет условиям (1)—(3) и, значит, $LS(\beta)$ и $RS(\beta)$ являются полными GM-системами, причем функции $LP_{\beta}(t)$ и $RP_{\beta}(t)$ являются соответственно допустимыми расписаниями для этих систем.

По лемме 1 имеем

$$M^{f_i}(LS(\beta))\leqslant M(f_i-a) \quad \forall i: f_i<\beta,$$

$$M^{f_i}(RS(\beta))\leqslant M(f_i-\beta) \quad \forall i: f_i>\beta,$$

откуда получаем соответственно соотношения (4) и (5).

Целочисленный вектор $x(\beta)$, являющийся решением системы неравенств (1)—(5), назовем вектором добавочной нагрузки интервала $[a, \beta]$.

Любой вектор добавочной нагрузки $x(\beta)$ задает полные GM-системы $LS(\beta)$ и $RS(\beta)$, которые определяются так же, как и выше.

Пусть $\beta_0, \ldots, \beta_n$ — различные директивные сроки начала решения задач GM-системы S, занумерованные в порядке возрастания. Будем считать, что $n>0$ (случай $n=0$ рассмотрен в ([2])).

Введем понятие S-дерева для GM-системы S, предполагая, что корень дерева имеет нулевой уровень.

Назовем S-деревом для данной GM-системы S дерево, каждый узел A которого помечен парой (LS_A, RS_A), где LS_A и RS_A некоторые GM-системы, причем корень дерева помечен (S, S), а любой узел A уровня $p<n$ имеет $k(A)$ потомков, где $k(A)$ — число различных векторов добавочной нагрузки интервала $[\beta_p, \beta_{p+1}]$ для GM-системы RS_A и i-ый потомок помечен $(LS^i(\beta_{p+1}), RS^i(\beta_{p+1}))$, $i=\overline{1, k(A)}$.

Из определения следует, что множество путей длины n в S-дереве определяется последовательностями

$$(S, S), \quad (LS^{k_1}(\beta_1), RS^{k_1}(\beta_1)), \ldots, (LS^{k_n}(\beta_n), RS^{k_n}(\beta_n))$$

при $k=(k_1, \ldots, k_n)\in\mathscr{K}$, где $\mathscr{K}$ — некоторое конечное множество, причем GM-системы $LS^{k_i}(\beta_i)$ и $RS^{k_i}(\beta_i)$, $k\in\mathscr{K}$, являются ограниченными (т. е. все задачи имеют одинаковые директивные сроки начала решения ([2])) и удовлетворяют условиям теоремы о существовании допустимых расписаний для ограниченных GM-систем ([2]). Следовательно, известны, причем непустые, множества всех допустимых расписаний для каждой из этих систем ([2]).

Обозначим через $\pi_k(S)$, $k\in\mathscr{K}$, множество функций $P(t)$, определяемых соотношением

$$P(t)=\begin{cases} LP_{\beta_i}(t), & t\in[\beta_{i-1}, \beta_i), \quad i=\overline{1, n}, \\ RP_{\beta_n}(t), & t\in[\beta_n, T], \end{cases} \tag{6}$$

где $LP_{\beta_i}(t)\in\mathscr{P}(LS^{k_i}(\beta_i))$, $i=\overline{1, n}$ и $RP_{\beta_n}(t)\in\mathscr{P}(RS^{k_n}(\beta_n))$.

Нетрудно видеть, что любая из этих функций $P(t)$ является допустимым расписанием для GM-системы S. Таким образом, справедлива следующая лемма.

Лемма 3. *Имеет место соотношение* $\pi_k(S)\subseteq\mathscr{P}(S)$, $k\in\mathscr{K}$.

Теорема. *Множество всех допустимых расписаний для GM-системы S определяется соотношением*

$$\mathscr{P}(S)=\bigcup_{k\in\mathscr{K}} \pi_k(S). \tag{7}$$

Доказательство. Пусть $P(t)$ — допустимое расписание для GM-системы S. Согласно лемме 2 для GM-системы S существует единственный $x(\beta_1)$ — вектор добавочной нагрузки интервала $[\beta_0, \beta_1]$, а для GM-систем $LS(\beta_1)$ и $RS(\beta_1)$ существуют допустимые расписания $LP_{\beta_1}(t)$ и $RP_{\beta_1}(t)$ соответственно.

Применяя лемму 2 ровно n раз, причем на p-ом шаге при $p>1$ к GM-системе $RS(\beta_{p-1})$, получим некоторый путь длины n в S-дереве и представим $P(t)$ в виде (6). Следовательно, учитывая лемму 3, получаем (7).

Всесоюзный научно-исследовательский и проектно-конструкторский институт комплексной автоматизации нефтяной и газовой промышленности

Մ. Պ. ԴՈՐՈՖԵԵՎԱ, Բ. Պ. ՕՎՍՅԱՆԿԻՆ, Ա. Վ. ՍՄԻՐՆՈՎ

Նախնական ժամկետները պահպանող բազմապրոցեսորային պլանների մասին

Սույն աշխատանքում դիտարկվում է տրված ժամանակներով և լուծման սկզբի և ավարտի նախատեսված ժամկետներով խնդիրների մի համակարգ։ Նկարագրված է խնդիրների այդպիսի համակարգի լուծման բոլոր թույլատրելի դասացուցակների բազմությունը համասեռ բազմապրոցեսորային հաշվողական սիստեմի վրա ընդհատումների թույլատրելիության դեպքում։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *В. С. Танаев, В. В. Шкурба*, Введение в теорию расписаний, Наука, М., 1975.
[2] *М. П. Дорофеева, В. П. Овсянкин, В. М. Шпенёв*, в сб.: Проблемы разработки автоматизированных систем управления и средств автоматизации нефтяной и газовой промышленности, Киев, 1982.