

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

УДК 539.3 : 517.946

В. Г. Мазья, С. А. Назаров

О парадоксе Сапонджяна—Бабушки
 в задачах теории тонких пластин

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР О. М. Сапонджяном 7/IV 1983)

Известный парадокс Сапонджяна—Бабушки (¹⁻³) заключается в том, что при аппроксимации тонкой круговой пластины правильными многоугольниками со свободно опертыми краями предельное решение не удовлетворяет условиям свободного опирания на окружности. Различным аспектам этого парадокса в последнее время уделялось много внимания (см. (⁴⁻⁷) и др.). В настоящей работе найдены другие эффекты той же природы. В частности, рассмотрены пластины с выпуклыми отверстиями; здесь в отличие от случая выпуклой пластины краевое условие на многоугольнике в пределе не сохраняется. Указаны способы аппроксимации гладкого контура, приводящие к предельному переходу от условий свободного опирания к условиям жесткого защемления.

1°. Выпуклая пластина. Рассмотрим пластину ω , ограниченную выпуклым замкнутым контуром γ единичной длины. Обозначим через $P^{(N)} = \{p_j^{(N)}\}_{j=1}^N$ набор точек на γ , делящих этот контур на N дуг равной длины. Впишем в ω ломаную γ_N с вершинами в точках $p_j^{(N)}$. Пластину, ограниченную контуром γ_N , обозначим через ω_N . Прогиб u_N пластины ω_N со свободно опертым краем удовлетворяет краевой задаче

$$D\Delta^2 u_N(x) = q(x), \quad x \in \omega_N; \quad (1)$$

$$u_N(x) = \Delta u_N(x) = 0, \quad x \in \gamma_N. \quad (2)$$

Так как пластина выпуклая, то равномерно (по N) ограничены интегралы $\int_{\omega_N} |\nabla u_N(x)|^2 dx$, $\int_{\omega_N} |\nabla \Delta u_N(x)|^2 dx$. Поэтому предельное решение u и его лапласиан Δu являются слабыми пределами последовательностей в пространстве Соболева $\dot{W}_2^1(\omega)$. Значит, u удовлетворяет граничным условиям (2) на γ , которые, разумеется, не являются условиями свободного опирания контура γ . В этой неустойчивости и заключается парадокс Сапонджяна—Бабушки.

Отметим, прежде всего, что задавая в вершинах многоугольника ω_N сосредоточенные моменты, можно добиться выполнения произволь-

ного распределения моментов на γ в пределе. Точнее, подчиним функцию u_N дополнительному условию

$$\Delta u_N(x) \sim \frac{1}{4} m(p_j^{(N)}) r^{-\pi/\alpha_j^{(N)}} \sin \frac{\pi\theta}{\alpha_j^{(N)}}, \quad r \rightarrow 0, \quad (3)$$

где (r, θ) — полярные координаты с центром $p_j^{(N)}$, $\alpha_j^{(N)}$ — раствор угла многоугольника ω_N в точке $p_j^{(N)}$, m — гладкая функция на γ . Такое решение существует и единственно, но обращает интеграл энергии в бесконечность. Можно показать, что последовательность решений задач (1)–(3) сходится в $W_2^1(\omega)$ к решению v уравнения (1) в ω с граничными условиями

$$v=0, \quad \Delta v = \kappa m \quad \text{на } \gamma, \quad (4)$$

где κ — кривизна контура γ . В частности, при соответствующем выборе функции m можно прийти при $N \rightarrow \infty$ к решению задачи о свободно опертой пластине ω .

2°. Пластина с отверстием. Пусть теперь пластина ограничена двумя гладкими замкнутыми контурами Γ и γ , причем кривая γ расположена внутри Γ . Рассмотрим пластину Ω_N , получающуюся из Ω заменой γ на ломаную γ_N . Прогиб u_N пластины Ω_N удовлетворяет краевой задаче

$$D\Delta^2 u_N(x) = q(x), \quad x \in \Omega_N; \quad L_1 u_N(x) = L_2 u_N(x) = 0, \quad x \in \Gamma; \quad (5)$$

$$u_N(x) = \Delta u_N(x) = 0, \quad x \in \gamma_N, \quad (6)$$

где $\{L_1, L_2\}$ — какой-нибудь из операторов граничных условий в теории тонких пластин.

Оказывается, что в отличие от случая выпуклой пластины здесь краевое условие не сохраняется при $N \rightarrow \infty$. Именно, последовательность $\{u_N\}$ сходится к решению w краевой задачи

$$D\Delta^2 w(x) = q(x), \quad x \in \Omega; \quad L_1 w(x) = L_2 w(x) = 0, \quad x \in \Gamma; \quad (7)$$

$$w(x) = \Delta w(x) + 4\kappa(s) \frac{\partial w}{\partial n}(x) = 0, \quad x \in \gamma, \quad (8)$$

где (s, n) — криволинейные координаты точки x ; n — расстояние до γ вдоль внутренней (по отношению к Ω) нормали; s — длина дуги, измеренная на γ от точки $p_1^{(N)}$.

Причина неустойчивости краевого условия $\Delta u = 0$ на вогнутом участке границы связана с появлением на аппроксимирующей ломаной входящих углов. В окрестности такого угла $\nabla \Delta u \notin L_2$, и поэтому рассуждение, приведенное в п. 1° в связи с парадоксом Сапонджяна — Бабушки, неприменимо. В угловых точках лапласиан решения задачи (5), (6) имеет особенность вида (3), которая отсутствует у решения задачи (1), (2). С накоплением этих сосредоточенных моментов и связано возникновение слагаемого $4\kappa \partial w / \partial n$ в (8) (ср. с (4)). Между прочим, здесь, как и в случае выпуклой пластины, можно, распределяя дополнительные моменты в вершинах ломаной γ_N , прийти к про-

извольным значениям Δw на γ . Сформулированные заключения являются непосредственными следствиями асимптотических формул для u_N при бесконечном увеличении числа звеньев ломаной γ_N . При $n \leq N^{-1/2}$ главный член асимптотики решения u_N задачи (5), (6) совпадает с w . При $n \leq N^{-1/2}$ вне кругов $D_j^{(N)}$ радиусов $N^{-3/2}$ с центрами

в точках $p_j^{(N)}$: $u_N(x) \sim w(x) + \frac{1}{N^2} z(s) \frac{\partial w}{\partial n}(x) W(sN, nN)$, где погранич-

ный слой $W(y_1, y_2)$ — экспоненциально убывающая при $y_2 \rightarrow \infty$ бигармоническая функция в полуполосе $\{y \in R^2: y_2 > 0, |y_1| < 1/2\}$, удовлетворяющая условиям периодичности при $y_1 = -1/2$ и $y_1 = 1/2$. Кроме того,

$W(y_1, 0) = \frac{1}{2} (y_1^2 - |y_1|)$, $\Delta_y W(y_1, 0) = 4$ при $|y_1| < \frac{1}{2}$; $W(y) \sim \frac{1}{\pi} |y| \times$

$\times \left(\sin \theta \log \frac{1}{|y|} + \theta \cos \theta \right) - \frac{y_1}{2}$ при $|y| \rightarrow 0$. Внутри кругов $\mathcal{D}_j^{(N)}$: $u_N(x) \sim$

$\sim - \frac{\partial W}{\partial n}(x) r^{2-\pi/\beta_j^{(N)}} \sin \frac{\pi \theta}{\beta_j^{(N)}}$, где $\beta_j^{(N)} = 2\pi - \alpha_j^{(N)}$; (r, θ) — те же полярные

координаты, что и в (3).

3°. Переход к условиям жесткого защемления. При других способах аппроксимации гладкого контура многоугольными возможен также переход в пределе от условий свободного опирания к условиям жесткого защемления.

Пусть G — плоская область, ограниченная гладким контуром Γ . Приблизим ее последовательностью областей G_N , построенных следующим образом. Пусть $\eta_1^{(N)}, \dots, \eta_N^{(N)}$ — замкнутые дуги на Γ , не имеющие общих внутренних точек. Через $\zeta_j^{(N)}$, $1 \leq j \leq N$, обозначим хорды, стягивающие ближайшие концы дуг $\eta_j^{(N)}$ и $\eta_{j+1}^{(N)}$, и через $\zeta_N^{(N)}$ — хорду, соединяющую концы дуг $\eta_N^{(N)}$ и $\eta_1^{(N)}$. (Не исключается случай вырождения $\eta_j^{(N)}$ и $\zeta_j^{(N)}$ в точку). Проведем через середину дуги $\eta_j^{(N)}$ внутреннюю нормаль к Γ и на ней на расстоянии h_N отметим точку $q_j^{(N)}$; $h_N = o(1)$ при $N \rightarrow \infty$. Соединим $q_j^{(N)}$ с концами дуги $\eta_j^{(N)}$ отрезками $T_{j,1}^{(N)}$ и $T_{j,2}^{(N)}$ (если $\eta_j^{(N)}$ — точка, то $T_{j,1}^{(N)} = T_{j,2}^{(N)}$). Пусть Γ_N — ломаная, составленная из отрезков $T_{j,k}^{(N)}$ и хорд $\zeta_j^{(N)}$; $|\eta_j^{(N)}|$ и $|\zeta_j^{(N)}|$ — длины дуг $\eta_j^{(N)}$ и хорд $\zeta_j^{(N)}$, а G_N — область, ограниченная контуром Γ_N . Предположим, что при $N \rightarrow \infty$ реализуется один из следующих двух вариантов:

$$i) \sum_{j=1}^N |\zeta_j^{(N)}| = o(1), \quad |\eta_j^{(N)}| = o(h_N), \quad |\zeta_j^{(N)}| = o(|\log h_N|^{-1});$$

$$ii) \sum_{j=1}^N |\zeta_j^{(N)}| = o(1), \quad |\zeta_j^{(N)}| = o(|\eta_j^{(N)}|), \quad |\eta_j^{(N)}| = o(h_N^{2/3}).$$

Будем считать, что пластина G_N свободно оперта по отрезкам $T_{j,1}^{(N)}$ и $T_{j,2}^{(N)}$, что на хордах $\zeta_j^{(N)}$ выполнены какие-нибудь однородные условия теории пластин. Тогда предельное при $N \rightarrow \infty$ решение будет удовлетворять условиям жесткого защемления на контуре Γ .

Доказательство этого факта не требует построения асимптотики

и основано на сравнительно грубых интегральных оценках. Например, в случае i) всякая функция U , равная нулю на $T_{i,1}^{(N)}$ и $T_{i,2}^{(N)}$, $1 \leq i \leq N$, удовлетворяет неравенству

$$\int_{x: n-h^{(N)}} \left| \frac{\partial U}{\partial n}(x) \right|^2 ds \leq \text{const} \frac{\max |z_i^{(N)}|}{|\log h_N|} \int_{\Omega^N} \sum_{i,k=1}^2 \left| \frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_k}(x) \right|^2 dx.$$

Оценки такого рода малочувствительны к способу аппроксимации области, и для них несущественно, какому уравнению удовлетворяет функция U . Поэтому сказанное выше о предельном переходе к условию жесткого защемления для решения уравнения Софи Жермен относится в равной мере к уравнениям нелинейного изгиба и к динамическим задачам теории пластин.

Ленинградский государственный университет
им. А. А. Жданова

Վ. Գ. ԽԱԶՅԱ, Ս. Ա. ՆԱԶԱՐՈՎ

Բարակ սալերի խնդիրներում առաջացող Սապոնջյան-Բաբուշկայի
պարադոքսի վերաբերյալ

Հայտնի Սապոնջյան-Բաբուշկայի պարադոքսը կայանում է նրանում, որ եզրերով ազատ հենված կանոնավոր բազմանկյուն սալի ծռման խնդրի լուծումից կողմերի թիվն անսահման մեծացնելով չի ստացվում եզրերով ազատ հենված կլոր սալի ծռման խնդրի լուծումը: Այդ պարադոքսի տարբեր դրվածքներ մեծ ուշադրության են արժանացել վերջին ժամանակները: Աշխատանքում ուսումնասիրվում են նույն բնույթի հարցեր: Մասնավորապես, ուսումնասիրվում են ուռուցիկ անցքերով սալեր: Այստեղ, ի տարբերություն ուռուցիկ սալի ծռման խնդրի, սահմանային դեպքում, եզրային պայմանը բազմանկյան վրա չի պահպանվում: Ցույց են տրվում ողորկ եզրի այնպիսի մոտարկություններ, որոնք բերում են սահմանային դեպքում եզրով ազատ հենված սալի եզրային պայմանից ամրակցված եզրի պայմանին: Վերջինս տեղի ունի նաև ոչ գծային ծռման և սալերի ծռման դինամիկական խնդիրներում:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ О. М. Сапонджян, Изв. АН АрмССР, т. 5, № 2 (1952). ² И. Бабушка, Чехословацкий мат. журн., т. 11, № 2 (1961). ³ О. М. Сапонджян, Изгиб тонких упругих плит, Айкастан, Ереван, 1975. ⁴ A. Hanuska, Beton- und Stahlbetongau, v. 9, 1969. ⁵ N. W. Murray, Proc. Camb. Phil. Soc., v. 73 (1973). ⁶ G. Rieder, Mech. Res. Comm. v. 1 (1974) ⁷ K. Rajaiiah, A. K. Rao, J. Appl. Mech., v. 48, (1981).