ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXVIII 1984 3

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

УДК 539.3

С. М. Мхитарян, Р. С. Туманян

О передаче нагрузки от произвольного числа равноотстоящих друг от друга кольцеобразных накладок к упругой плоскости

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Б. Л. Абрамяном 7/II 1983)

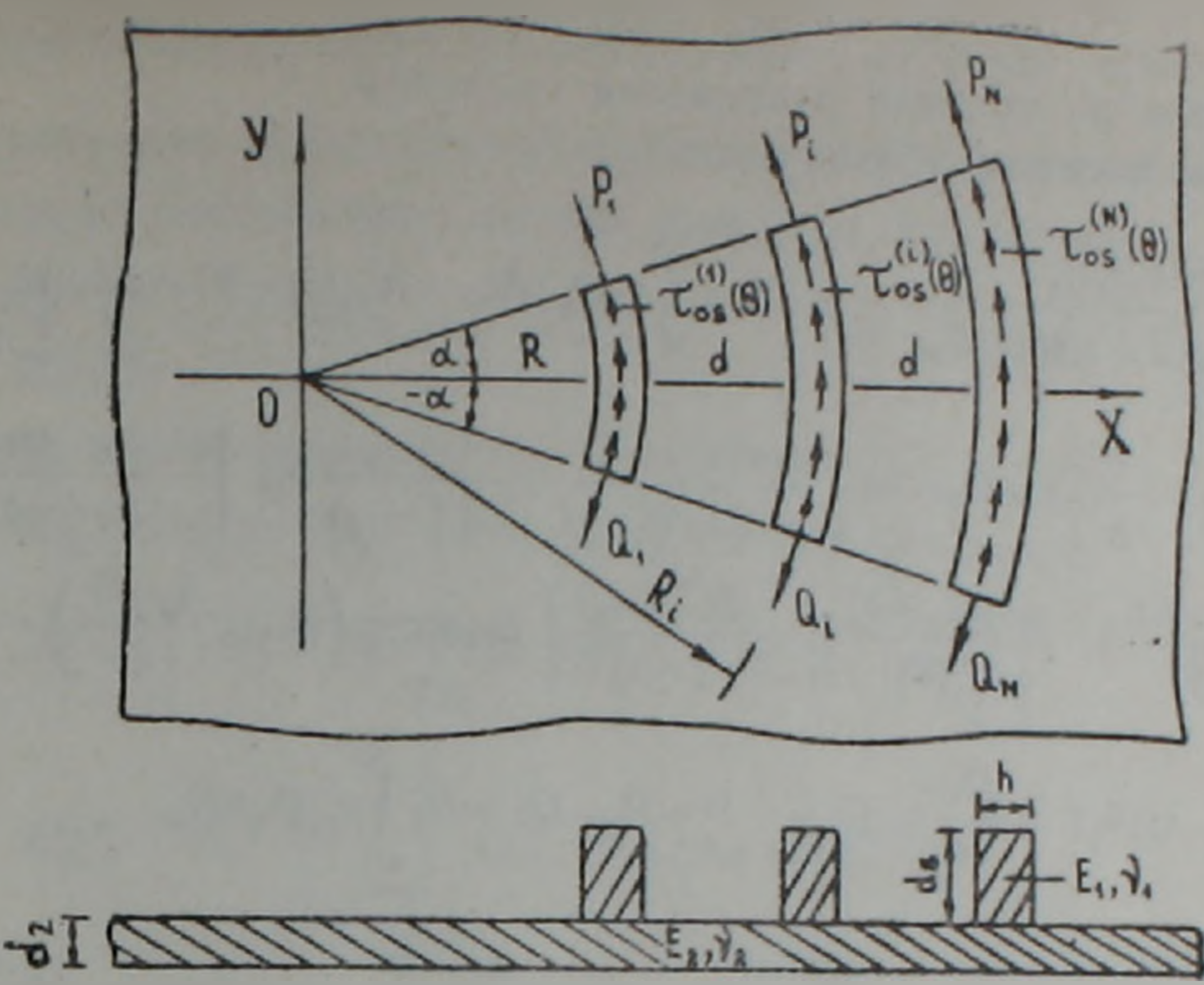
Контактные задачи о передаче нагрузки от прямолинейной тонкой накладки, коллинеарно скрепленной с упругой полуплоскостью на ее границе или поперечно скрепленной с ней, рассматривались в ([1, 2]). Исследованию обширного класса подобных задач посвящены многочисленные работы, подробная библиография которых приведена в ([3]). В ([4]) обсуждена задача о передаче нагрузок от произвольного числа параллельных и равноотстоящих друг от друга прямолинейных накладок к упругой плоскости.

В настоящей работе рассматривается аналогичная задача для произвольного числа равноотстоящих друг от друга кольцеобразных накладок, существенно отличающаяся от постановки задачи для прямолинейных накладок, потому что кольцеобразные накладки не находятся в одноосном напряженном состоянии. Под ними действуют и тангенциальные осевые и поперечные радиальные контактные напряжения.

1. Пусть упругая бесконечная пластина высотой d_2 с упругими постоянными E_2, ν_2 на своей верхней грани усилена системой произвольного числа N кольцеобразных упругих накладок с круговыми осями радиусов $R_i = R + (i-1)d$ $(i = 1, 2, \ldots, N)$. Они имеют высоту d_s, ширину h, угол раствора 2α $(0 < \alpha < \pi)$, упругие постоянные E_1, ν_1 и расположены на одинаковом расстоянии d друг от друга. Пусть, далее, накладки загружены указанными на рисунке силами. Будем считать, что $h, d_S \ll R_i$ $(h < d_S)$. Требуется определить закон распределения контактных напряжений в области соединения накладок с пластиной.

Для вывода определяющего уравнения поставленной задачи воздействие кольцеобразных накладок заменим неизвестными осевыми тангенциальными $\bar{\tau}_{is}(\theta)$ и поперечными радиальными $\bar{q}_{is}(\theta)$ контактными напряжениями. По известной методике ([5]) вычислим осевую деформацию $\varepsilon_{i\theta}^{(2)}$ точек упругой плоскости под i-той накладкой.

Далее воспользуемся известными формулами ([6]) для коэффициентов Ламе в локальных координатах (s, n). Затем осредняем уравнения теории упругости для кольцеобразных накладок по их



высоте и ширине. При этом поскольку h, $d_s \ll R_i$, то жесткостями изгиба накладок в вертикальном и поперечном направлениях пренебрегаем. В итоге придем к уравнениям

$$\frac{1}{R_i}\frac{dT_i}{d\theta}+\frac{\tau_{0s}^{(i)}(\theta)-\bar{\tau}_{is}(\theta)}{d_s}=0,\quad \bar{q}_{is}(\theta)=-\frac{d_s}{R_i}T_i(\theta)$$

и граничным условиям

$$T_i(-\alpha)=\frac{Q_i}{d_s},\qquad T_i(\alpha)=\frac{P_i}{d_s}.$$

Здесь $T_i(\theta)$ — осевое усилие в i-той накладке. Из этих уравнений при помощи закона Гука будем иметь

$$\varepsilon_{is}^{(1)}(\theta)=\frac{1}{E_1A_s}\left\{Q_i+R_i\int_{-\alpha}^{\theta}\left[\bar{\tau}_{is}(\theta_0)-\tau_{0s}^{(i)}(\theta_0)\right]d\theta_0\right\} \tag{1.1}$$

$$(A_s=hd_s,\quad -\alpha<\theta<\alpha),$$

где $\varepsilon_{is}^{(1)}(\theta)$ — осевая деформация i-той накладки.

Теперь, учитывая условие контакта $\varepsilon_{i\theta}^{(2)}=\varepsilon_{is}^{(1)}(\theta)$, решение поставленной задачи после перехода к безразмерным величинам окончательно сводим к решению следующей системы сингулярных интегро-дифференциальных уравнений:

$$\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k}\int_{-\alpha}^{\alpha}\left[\delta_{ik}\operatorname{ctg}\frac{\theta_0-\theta}{2}+K_{ik}^{*}(\theta_0-\theta)\right]\varphi_k'(\theta_0)d\theta_0=\lambda\varphi_i(\theta)+f_i^0(\theta)$$

$$(-\alpha<\theta<\alpha;\quad i=1,\,2,\,\ldots,\,N) \tag{1.2}$$

при граничных условиях

$$\varphi_i(-\alpha)=0, \quad \varphi_i(\alpha)=1, \tag{1.3}$$

вытекающих из условий равновесия накладок.

Здесь введены обозначения

$$\lambda=\frac{8\pi R d_2 E_2}{(1+\nu_2)(2-\nu_2)h d_S E_1}, \quad \varphi_k(\theta)=\int_{-\alpha}^{\theta}\tau_k(\theta_0)d\theta_0, \quad K_{ik}^{*}(\theta_0-\theta)=kK_{ik}(\theta_0-\theta),$$

$$K_{ik}(\theta_0-\theta)=\frac{1}{k}\left\{\sin(\theta_0-\theta)+\frac{\sin 2(\theta_0-\theta)}{2\Delta_{ik}(\theta)}+\frac{1+\nu_2}{2(3-\nu_2)}b_{ik}\left[-\frac{a_i}{k}\frac{\sin(\theta_0-\theta)}{\Delta_{ik}^2(\theta)}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\sin 2(\theta_0-\theta)}{2\Delta_{ik}^2(\theta)}+\frac{\sin(\theta_0-\theta)}{\Delta_{ik}(\theta)}\right]-\frac{2(1-\nu_2)}{3-\nu_2}\left[b_{ik}\operatorname{arctg}\left(d_{ik}\operatorname{tg}\frac{\theta_0-\theta}{2}\right)-a_{ik}\theta_0\right]\right\},$$

$$\tau_k(\theta_0)=\frac{R_k}{P}\bar{\tau}_{ks}(\theta_0), \quad P=P_i-Q_i+R_i\int_{-\alpha}^{\alpha}\tau_{0s}^{(i)}(\theta_0)d\theta_0,$$

$$a_{ik}=\frac{a_i^2+k^2}{2a_ik}, \quad b_{ik}=\frac{a_i^2-k^2}{a_ik}, \quad d_{ik}=\frac{a_i+k}{a_i-k}, \quad a_i=1+(i-1)\frac{d}{R},$$

$\Delta_{ik}(\theta)=a_{ik}-\cos(\theta_0-\theta)$, δ_{ik}—символ Кронекера.

Функция $f_i^0(\theta)$ учитывает осевую деформацию i-той накладки, обусловленную приложенными к ней известными силовыми факторами.

При этом радиальные напряжения будут определяться по формуле

$$q_i(\theta)=-q_i-\varphi_i(\theta)+\int_{-\alpha}^{\theta}\tau_0^{(i)}(\theta_0)d\theta_0, \qquad q_i(\theta)=\frac{R_i}{P}\bar{q}_{is}(\theta), \tag{1.4}$$

где

$$q_i=\frac{Q_i}{P}, \qquad \tau_0^{(i)}(\theta_0)=\frac{R_i}{P}\tau_{0s}^{(i)}(\theta_0).$$

2. Для решения систем сингулярных интегро-дифференциальных уравнений (1.2) при граничных условиях (1.3), следуя известной процедуре ([7,8]), положим

$$\tau_i(\theta)=\varphi_i'(\theta)=\frac{\sec\theta/2}{\sqrt{2(\cos\theta-\cos\alpha)}}\sum_{n=0}^{\infty}x_n^{(i)}T_n\left(\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\right) \tag{2.1}$$

$$(-\alpha<\theta<\alpha; \quad i=1, 2, \ldots, N),$$

где $T_n(x)$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$—многочлены Чебышева первого рода. Отсюда после простых выкладок получим

$$\varphi_i(\theta)=\sec\frac{\alpha}{2}\left\{x_0^{(i)}\left[\pi-\arccos\left(\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\right)\right]-\right.$$

$$\left.-\sum_{n=1}^{\infty}n^{-1}x_n^{(i)}\sin\left[n\arccos\left(\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\right)\right]\right\} \quad (-\alpha\leqslant\theta\leqslant\alpha; \; i=1, 2, \ldots, N). \tag{2.2}$$

Из граничных условий непосредственно находим $x_0^{(i)}=\pi^{-1}\cos\dfrac{\alpha}{2}$.

Относительно остальных коэффициентов $\{x_n^{(i)}\}_{n=1}^{\infty}$ получим следующую систему бесконечных систем линейных уравнений:

$$x_m^{(i)}+\sum_{k=1}^{N}\sum_{n=1}^{\infty}K_{m,n}^{(i,k)}x_n^{(k)}=a_m^{(i)}\quad (i=1,2,\ldots,N;\ m=1,2,\ldots),\tag{2.3}$$

где введены обозначения

$$K_{m,n}^{(i,k)}=c[ik^{-1}A_{m,n}^{(i,k)}-\lambda i\delta_{ik}B_{m,n}],\quad c=(2\pi^2)^{-1}\operatorname{ctg}\alpha/2,$$

$$a_m^{(i)}=c\left[if_m^{(i)}-x_0^{(i)}\sum_{k=1}^{N}ik^{-1}A_{m,0}^{(i,k)}-x_0^{(i)}\pi h_m\sec\frac{\alpha}{2}\right],$$

$$A_{m,n}^{(i,k)}=4\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\int_0^\pi\int_0^\pi f_1(\varphi,t)\sin m\varphi\cos nt\,d\varphi\,dt,$$

$$B_{m,n}=-\frac{4}{n}\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\int_0^\pi\frac{\sin\varphi\sin m\varphi\sin n\varphi}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\varphi}\,d\varphi,$$

$$f_m^{(i)}=\int_{-\alpha}^{\alpha}f_i^0(\theta)\frac{\sqrt{2(\cos\theta-\cos\alpha)}}{\cos\frac{\theta}{2}}\,U_{m-1}\left(\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\right)d\theta+h_m^{(i)},$$

$$f_1(\varphi,t)=K_{ik}^{*}\left[2\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cos t\right)-2\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cos\varphi\right)\right]\frac{\sin\varphi}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\varphi}.$$

Здесь $U_{m-1}(x)$ $(m=1,2,\ldots)$ — многочлены Чебышева второго рода, а коэффициенты h_m и $h_m^{(i)}$ выражаются в конечном виде или однократными интегралами Фурье простых структур.

3. Перейдем к исследованию (2.3). С этой целью оценим суммы

$$S_m=\sum_{k=1}^{N}\sum_{n=1}^{\infty}|K_{m,n}^{(i,k)}|\leqslant S_m^{(1)}+S_m^{(2)}\quad (i=1,2,\ldots,N;\ m=1,2,\ldots),\tag{3.1}$$

где

$$S_m^{(1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{1}{n}C_{m,n}^{(i,k)}\right|,\quad S_m^{(2)}=\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{1}{n}R_{m,n}^{(i,k)}\right|,$$

$$C_{m,n}^{(i,k)}=\frac{4}{\pi^2}\int_0^\pi\int_0^\pi\Phi^{(i,k)}(\varphi,t)\sin m\varphi\sin nt\,d\varphi\,dt,$$

$$R_{m,n}^{(i,k)}=\frac{2\lambda}{\pi^2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}i\delta_{ik}\int_0^\pi\frac{\sin\varphi\sin m\varphi\sin n\varphi}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\varphi}\,d\varphi,\tag{3.2}$$

$$\Phi^{(i,k)}(\varphi,t)=-\frac{i}{2k}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\frac{\partial}{\partial t}[f_1(\varphi,t)].$$

Согласно неравенству Коши—Буняковского можем записать

$$S_m^{(\cdot)} = \frac{\pi}{\sqrt{6}} \left[\sum_{n=1}^{\infty} |C_{m,n}^{(l,k)}| \right]^{1/2}.$$

Из (3.2) видно, что последовательность $|C_{m,n}^{(l,k)}|_{m,n-1}^{\infty}$ является последовательностью коэффициентов Фурье функции $\Phi^{(l,k)}(\varphi, t)$ по системе $\{\sin m\varphi \sin nt\}_{m,n-1}^{\infty}$, которые составляют полную ортогональную систему в квадрате $0 \leqslant \varphi,\ t \leqslant \pi$. Поэтому на основе известного неравенства Бесселя двойной ряд $\sum\limits_{m=1}^{\infty} \sum\limits_{n=1}^{\infty} |C_{m,n}^{(l,k)}|^2$ сходится. Далее, как в ([8]), получим, что $S_m^{(1)} = O(m^{-(1-\varepsilon)/2})$ при $m \to \infty$. Такой же порядок имеют суммы $S_m^{(2)}$. В результате $S_m = O(m^{-(1-\varepsilon)/2})$ при $m \to \infty$, т. е. система (2.3) при любом значении параметра λ квазивполне регулярна.

Далее можно показать, что свободные члены бесконечных систем стремятся к нулю при $m \to \infty$ со скоростью не менее, чем $m^{-1/2}$.

Радиальные контактные напряжения будут выражаться формулой (1.4), где $\varphi_l(\theta)$ дается при помощи (2.2).

Институт механики
Академии наук Армянской ССР
Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса.

Ս. Մ. ՄԽԻԹԱՐՅԱՆ, Ռ. Ս. ԹՈՒՄԱՆՅԱՆ

Առաձգական հարթության կամայական թվով միմյանցից հավասարահեռ դասավորված օղակաձև վերդրակներից բեռի փոխանցման մասին

Դիտարկվում է կամայական թվով միմյանցից հավասարահեռ դասավորված շրջանագծային առանցքներով վերդրակներից առաձգական հարթությանը բեռի փոխանցման վերաբերյալ կոնտակտային խնդիրը։ Ենթադրվում է, որ վերդրակների տակ գործում են ինչպես շոշափող, այնպես էլ շառավղային կոնտակտային լարումներ։ Խնդրի լուծումը բերվում է սինգուլյար ինտեգրա-դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգի լուծմանը, որը Չեբիշևի բազմանդամների մեթոդի օգնությամբ իր հերթին բերվում է հավասարումների անվերջ համակարգերի համակարգին։ Հետազոտվում է վերջին ռեգուլյարությունը։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Н. Х. Арутюнян,* ПММ, т. 32, вып. 4 (1968). [2] *Б. Л. Абрамян,* МТТ, № 5, 1972. [3] Развитие теории контактных задач в СССР, Наука, М., 1976. [4] *К. Л. Агаян,* МТТ, № 2, 1972. [5] *Н. И. Мусхелишвили,* Некоторые основные задачи математической теории упругости, Наука, М., 1966. [6] *Н. Х. Арутюнян, Б. Л. Абрамян,* Кручение упругих тел, Физматгиз, М., 1963. [7] *Г. А. Морарь, Г. Я. Попов,* ПММ, т. 35, вып. 1 (1971). [8] *Н. Х. Арутюнян, С. М. Мхитарян,* ПММ, т. 36, вып. 5 (1972).