ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXVIII 1984 3

УДК 539.376

МЕХАНИКА

А. Д. Дроздов, В. Б. Колмановский, В. Д. Потапов

# Устойчивость стержней из неоднородно-стареющего вязкоупругого материала

(Представлено академиком АН Армянской ССР А. Г. Назаровым 30/I 1983)

Рассмотрена устойчивость на бесконечном и конечном интервалах времени неармированных и армированных неоднородно-стареющих вязкоупругих стержней при произвольном ядре релаксации материала, различных видах нагружения и типах опирания концов. Определения устойчивости на бесконечном и конечном интервалах времени соответствуют определениям устойчивости движения динамических систем по Ляпунову и Четаеву.

Исследование устойчивости вязкоупругих стержней с учетом неоднородного старения материала проводилось в ([1,2]), в которых для ядра ползучести Н. Х. Арутюняна ([3]) найдены условия устойчивости на бесконечном и конечном промежутках времени. Аналогичная задача для вязкоупругих стержней, армированных упругими элементами, решалась в ([4,5]).

1. Постановка задачи устойчивости стержней на бесконечном интервале времени. Рассматривается прямолинейный стержень постоянного поперечного сечения длиной $l$, изготовленный из неоднородно-стареющего вязкоупругого материала. Поперечное сечение стержня имеет одну ось симметрии, а его момент инерции относительно центральной оси, перпендикулярной оси симметрии, равен $J$. Изгиб стержня происходит в плоскости, проходящей через указанную ось симметрии и ось $Ox$, совпадающую с продольной осью стержня. В момент времени $t_0=0$ к стержню приложена внешняя продольная и распределенная поперечная нагрузка интенсивностью $q(x)$. Возраст элемента материала стержня в момент времени $t_0$ обозначим через $\rho(x)$. Функция $\rho$ кусочно-непрерывна и ограничена. При одноосном напряженном состоянии деформация $\varepsilon(t, x)$ и напряжение $\sigma(t, x)$ в момент времени $t \geqslant 0$ в точке $x$ связаны соотношением ([6])

$$\varepsilon = \frac{1}{E}(I+K)\sigma \quad \text{или} \quad \sigma = E(I+K)^{-1}\varepsilon = E(I-R)\varepsilon.$$

Здесь $I$—единичный оператор, $K$, $R$—операторы ползучести и релаксации,

$$K\sigma = \int_0^t k(t+\rho(x),\ \tau+\rho(x))\sigma(\tau, x)\,d\tau, \quad R\varepsilon = \int_0^t r(t+\rho(x),\ \tau+\rho(x))\,\varepsilon(\tau, x)\,d\tau,$$

$k(t, \tau)$, $r(t, \tau)$—ядра ползучести и релаксации, $E$—постоянный модуль упруго-мгновенной деформации. Ядро ползучести $k$ допускает представление $k(t, \tau)=l_0(t, \tau)+l_1(t, \tau)(t-\tau)^{-\varkappa}$, $0\leqslant\varkappa<1$. Функции $l_0$, $l_1$ неотрицательны, кусочно-непрерывны по $\tau$ и непрерывны по $t$ при $t\geqslant\tau\geqslant0$. Аналогичное утверждение справедливо для ядра релаксации $r$.

Обозначим через $y_0(x)$ возможный начальный и $y(t, x)$ полный прогиб стержня в точке $x$ в момент времени $t\geqslant0$. Считается, что прогиб стержня достаточно мал (т. е. в выражении кривизны можно пренебречь величиной $y'^2=(\partial y/\partial x)^2$ по сравнению с единицей) и справедлива гипотеза плоских сечений.

Определение. *Прямолинейное положение стержня устойчиво по отношению к возмущениям—начальному прогибу и поперечной распределенной нагрузке, если для любого* $A>0$ *существуют такие* $\delta_1(A)>0$ *и* $\delta_2(A)>0$, *что из неравенств* $\sup_x|q(x)|<\delta_1$, $\sup_x|y_0(x)|<\delta_2$ *следует оценка* $\sup_{t,x}|y(t, x)|<A$, $(t\in[0,\infty)$, $x\in[0,l])$.

2. Устойчивость стержня при действии сосредоточенной сжимающей силы. Пусть к концам стержня приложена сжимающая сила $P$. Прогиб стержня удовлетворяет уравнению

$$[(I-R)(y-y_0)'']''+P(EJ)^{-1}y''=q(EJ)^{-1}.$$

Справедливо одно из следующих граничных условий:

$$y(t, 0)=y'(t, 0)=y(t, l)=y'(t, l)=0; \tag{2.1}$$

$$y(t, 0)=y''(t, 0)=y(t, l)=y'(t, l)=0; \tag{2.2}$$

$$y(t, 0)=y''(t, 0)=y(t, l)=y''(t, l)=0. \tag{2.3}$$

На ядра ползучести и релаксации наложены следующие ограничения:

1) существует такая функция $r_1(t, \tau)$, что

$$0\leqslant r(t+\rho(x), \tau+\rho(x))\leqslant r_1(t, \tau), \quad 0\leqslant\tau\leqslant t, \quad 0\leqslant x\leqslant l,$$

$$|r_1|=\sup_t\int_0^t r_1(t, \tau)d\tau<1;$$

2) существует такая функция $r_0(t, \tau)$, что равномерно по $t\geqslant T$

$$\lim_{T\to\infty}\int_T^t \sup_x|r(t+\rho(x), \tau+\rho(x))-r_0(t, \tau)|d\tau=0,$$

$$|r_0|<1, \qquad |k_0|<\infty.$$

Здесь $k_0$—ядро ползучести, соответствующее ядру релаксации $r_0$.

Пусть $\lambda>0$—минимальное собственное значение краевой задачи $y''''+\lambda y''=0$ с одним из граничных условий (2.1)—(2.3).

Теорема 1. *Стержень устойчив, если выполнено неравенство*

$$P < EJ\lambda(1+|k_0|)^{-1}. \tag{2.4}$$

Если ядро $r_0$ разностное, то это условие является необходимым и достаточным. Отсюда следует результат работ ([7,8]), полученный для однородного вязкоупругого стержня.

Пусть на стержень действует $m$ сосредоточенных сжимающих сил $P_1, P_2, \ldots, P_m$, приложенных в разных точках стержня, и $n$ распределенных сжимающих нагрузок интенсивностью $g_{m+1}, g_{m+2}, \ldots$ $\ldots, g_{m+n}$. Обозначим через $\lambda_i$ собственное значение краевой задачи, отвечающей упругому стержню, сжатому $i$-ой сосредоточенной силой ($i=1, 2, \ldots, m$), а через $\lambda_j$—собственное значение краевой задачи, отвечающей упругому стержню, сжатому $j$-ой распределенной нагрузкой $g_j$ ($j=m+1, \ldots, m+n$). Стержень устойчив, если

$$\sum_{i=1}^{m} P_i\lambda_i^{-1} + \sum_{j=m+1}^{m+n} g_j\lambda_j^{-1} < EJ(1+|k_0|)^{-1}.$$

Этот результат является обобщением теоремы Папковича ([9]), доказанной для упругих стержней ($|k_0|=0$).

Для ядра ползучести

$$k(t, \tau) = -\frac{\partial}{\partial\tau}\{\varphi(\tau)[1-\exp(-\gamma(t-\tau))]\} \tag{2.5}$$

условие (2.4) принимает вид $P < EJ\lambda(1+EC_0)^{-1}$, ($C_0=\lim_{\tau\to\infty}\varphi(\tau)$) и совпадает с условием устойчивости, полученным в ([1,2]).

3. Устойчивость стержня при однопараметрическом нагружении. Пусть на стержень действует продольная нагрузка, при которой нормальная сила $N$ в каждом сечении стержня равна $N(x)=aN_0(x)$, где $N_0$—заданная кусочно-непрерывная функция. Обозначим через $\lambda>0$ минимальное собственное значение краевой задачи $y''''+\lambda(N_0y')'=0$ с граничными условиями (2.1)—(2.3).

Теорема 2. *Стержень устойчив, если выполнено неравенство*

$$a < EJ\lambda(1+|k_0|)^{-1}.$$

Пусть $E=E(t+\rho(x))$, $a=a(t)$ зависят от времени, причем $E(t+\rho(x)) \geqslant E_1(t) > 0$, $a(t) < \lambda JE_1(t)$ для любого $t\geqslant 0$ и $\lim_{t\to\infty} E(t+$ $+\rho(x)) = E_0 > 0$, $\lim_{t\to\infty} a(t) = a_0 > 0$. Тогда стержень устойчив, если $a_0 < E_0J\lambda(1+|k_0|)^{-1}$.

4. Устойчивость армированного стержня. Пусть стержень армирован упругим материалом с модулем упругой деформации $E_a$. Поперечное сечение стержня имеет две оси симметрии и арматура расположена симметрично относительно этих осей. Момент инерции арматуры $J_a$ постоянен.

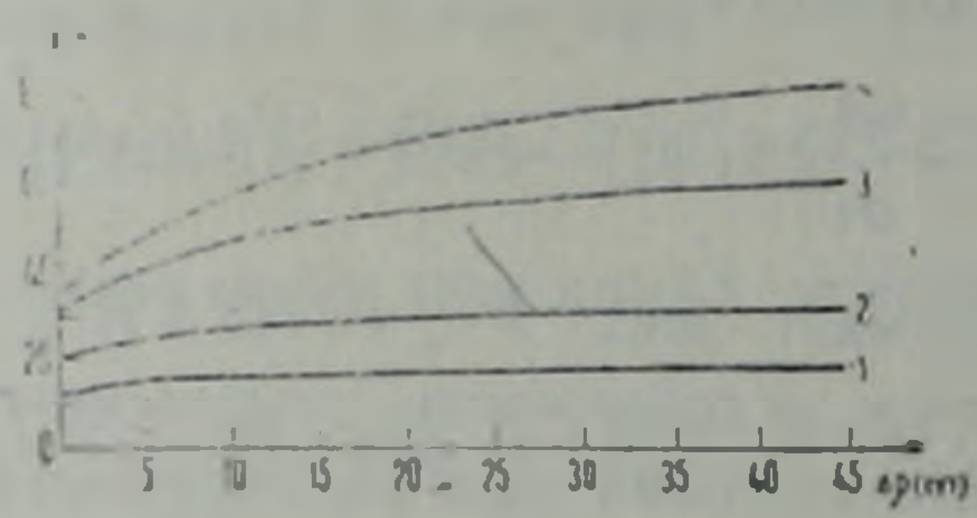
Теорема 3. *Условия устойчивости армированного стержня совпадают с условиями устойчивости неармированного стержня с модулем упругомгновенной деформации $E$, моментом инерции $J_0=(EJ+E_aJ_a)/E$ и ядром релаксации $\beta r(t, \tau)$, где $\beta=J/J_0$.*

Пусть армированный стержень сжат силой $P$. Ядро ползучести основного материала имеет вид (2.5). Тогда стержень устойчив, если $P < P_0[1+(1-\beta)EC_0](1+EC_0)^{-1}$, где $P_0$—эйлерова критическая сила для упругого стержня, жесткость на изгиб которого равна $EJ_0$.

5. Устойчивость стержня на конечном интервале времени. Пусть прогиб стержня исследуется на конечном интервале времени $[0, T]$ и задано критическое значение прогиба $y^0$. Критическое время $T^0$ определяется как первый момент достижения прогибом значения $y^0$.

Определение. *Стержень называется устойчивым на интервале времени* $[0, T]$, *если* $T^0 > T$.

Для анализа зависимости критического времени $T^0$ от возраста материала проведен численный расчет для стержня с граничными условиями (2.1). На стержень действуют сжимающая сила $P$ и распределенная поперечная нагрузка постоянной интенсивности $q$. Ядро ползучести материала стержня имеет вид (2.5) с функцией старения $\varphi(\tau)=A_1+A_2\tau^{-1}$. Стержень состоит из двух равных частей. Возраст одной части $\rho_1$ постоянен. Возраст второй части $\rho_2$ варьировался от $\rho_1$ до $10\rho_1$.




Результаты расчетов показывают, что при возрастании разности возрастов $\Delta\rho=\rho_2-\rho_1$ отдельных участков стержня критическое время увеличивается, причем тем интенсивнее, чем больше величина $y^0$ критического значения прогиба (рисунок).

Московский институт инженеров
железнодорожного транспорта

Ա. Դ. ԴՐՈԶԴՈՎ, Վ. Բ. ԿՈԼՄԱՆՈՎՍԿԻ, Վ. Դ. ՊՈՏԱՊՈՎ

## Անմիասեռ ծերացող կպչուն առաձիգ նյութից պատրաստած ձողերի կայունությունը

*Դիտվում է ամրացված ու ոչ ամրացված անհամասեռ ծերացող կպչուն առաձիգ ձողերի կայունությունը ժամանակի անվերջ և վերջնական ինտերվալներում նյութի ռելաքսացիայի կամայական միջուկի, տարբեր ձևերի բռնումների և ծայրերի տարբեր ձևի հենման դեպքում։ Ստացված են ձողերի*

*կայունության պայմանները ժամանակի անվերջ ինտերվալներում։ Կայունության որոշումները ժամանակի անվերջ և վերջնական ինտերվալներում համապատասխանում են դինամիկ համակարգերի շարժման կայունության որոշմանը՝ ըստ Լյապունովի և Չետաևի։*

## ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ


[1] *Н. Х. Арутюнян, В. Б. Колмановский*, ПММ, т. 43, № 4 (1979). [2] *Н. Х. Арутюнян, В. Б. Колмановский*, Изв. АН АрмССР. Механика, т. 33, № 4 (1980). [3] *Н. Х. Арутюнян*, Некоторые вопросы теории ползучести, ГИТТЛ, М.-Л., 1952. [4] *Н. Х. Арутюнян, В. Б. Колмановский*, ДАН СССР, т. 258, № 6 (1981). [5] *Н. Х. Арутюнян, В. Б. Колмановский*, ПММ, т. 45, № 6 (1981). [6] *Н. Х. Арутюнян*, Изв. АН СССР, МТТ, № 3, 1976. [7] *А. Р. Ржаницын*, Некоторые вопросы механики систем, деформирующихся во времени, Гостехиздат, М., 1949. [8] *Ю. Н. Работнов*, Элементы наследственной механики твердых тел, Наука, М., 1977. [9] *П. Ф. Папкович*, Строительная механика корабля, ч. 2, Судпромгиз, Л., 1941.