ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXVIII 1984 3

МАТЕМАТИКА

УДК 517.522.3

Л. А. Шагинян

О единственности тригонометрических рядов

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР А. А. Талаляном 11/II 1983)

Для произвольного тригонометрического ряда

$$\Omega \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

обозначим соответственно через $\{S_n(\Omega, x)\}$, $\{\sigma_n(\Omega, x)\}$ и $\{t_n(\Omega, x)\}$ частичные суммы, $(C, 1)$ и T средние ряда Ω, а через $\{S_n(f, x)\}$—частичные суммы ряда Фурье функции f. Кроме того, пусть $\{\Omega\}^*$—класс тех тригонометрических рядов, которые удовлетворяют следующим условиям:

$$1.\ \lim_{k\to\infty} (|a_k| + |b_k|) = 0, \tag{1}$$

$$2.\ \overline{\lim_{n\to\infty}} |S_n(\Omega, x)| < +\infty \quad \text{на} \quad [0, 2\pi] \tag{2}$$

за исключением, быть может, некоторого счетного множества E.

Задачи, рассматриваемые в настоящей заметке, группируются вокруг следующего вопроса: когда ряд Ω из класса $\{\Omega\}^*$ является рядом Фурье*.

Здесь основным результатом является теорема Валле—Пуссена ((1), с. 167; (2) с. 789).

Теорема А. *Если* $\Omega \in \{\Omega\}^*$ *и вместе с тем*

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} S_n(\Omega, x), \quad \overline{\lim_{n\to\infty}} S_n(\Omega, x) \in L[0, 2\pi], \tag{3}$$

то Ω суммируется методом R п. в. на $[0, 2\pi]$ к суммируемой функции и является рядом Фурье этой функции.

Отсюда получается теорема В, которая содержит в себе классические результаты единственности Гейне—Кантора и Юнга—Бернштейна ((1), с. 168, (3), с. 225).

Теорема В. *Если тригонометрический ряд Ω сходится к нулю п. в. на отрезке $[0, 2\pi]$ и удовлетворяет условию (2), то $\Omega \equiv 0$, т. е. все коэффициенты ряда Ω равны нулю.*

---

* Под рядом Фурье мы подразумеваем ряд Фурье—Лебега. Условия (1) и (2) сами по себе не достаточны, чтобы Ω был рядом Фурье: существует тригонометрический ряд, который сходится всюду, но не является рядом Фурье ((2), с. 123).

Следующее обобщение теоремы A принадлежит С. Банаху ([2], с. 790).

Теорема C. *Если* $\Omega \in \{\Omega\}^*$ *и*

$$\varliminf_{n\to\infty} S_n(\Omega, x) \geqslant g(x) \quad \text{п. в. на } [0, 2\pi], \tag{4}$$

где $g(x)$ *суммируема и конечна вне* E (см. (2)), *то* Ω *есть ряд Фурье.*

Отметим, что теоремы A и C в определенном смысле эквивалентны, так как из теоремы Зигмунда—Марцинкевича о пределах неопределенности тригонометрических рядов ([2], с. 868) и теоремы Фейера—Лебега сразу получается, что если Ω—ряд Фурье, то из (2) и (4) следует (3) и, таким образом, обе теоремы выделяют один и тот же класс рядов Фурье, удовлетворяющих условиям (2) и (3), ни одному из которых, вообще говоря, ряды Фурье не удовлетворяют ([2], с. 421).

Вместе с тем согласно той же теореме Зигмунда—Марцинкевича, если ряд Фурье Ω удовлетворяет условию (2), то

$$f(\Omega, x) \equiv \frac{1}{2}\left\{\varliminf_{n\to\infty} S_n(\Omega, x) + \varlimsup_{n\to\infty} S_n(\Omega, x)\right\} \in L[0, 2\pi] \tag{5}$$

и естественно возникает вопрос: нельзя ли усилить теорему A, заменив в ней условие (3) необходимым условием (5). Справедлива

Теорема 1. *Пусть* $\Omega \in \{\Omega\}^*$. *Тогда* Ω *является рядом Фурье функции* $f(x) \in L[0, 2\pi]$ *в том и только в том случае, когда*

$$f(x) = \frac{1}{2}\left\{\varliminf_{k\to\infty} S_{n_k}(\Omega, x) + \varlimsup_{k\to\infty} S_{n_k}(\Omega, x)\right\} \quad \text{п. в. на } [0, 2\pi] \tag{6}$$

для некоторой последовательности $\{n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots\}$.

Следующее утверждение показывает, что теорема 1 действительно выделяет более широкий класс рядов Фурье, чем теоремы A и C.

Теорема 2. *Существует ряд Фурье* $\Omega \in \{\Omega\}^*$, *который не удовлетворяет условию* (3).

Если тригонометрический ряд Ω удовлетворяет условиям (1) и (6), то для выяснения, является ли Ω рядом Фурье функции f, представляется естественным вместо условия (2) (которому может и не удовлетворять ряд Фурье функции f) требовать, чтобы

$$\varlimsup_{n\to\infty} |S_n(\Omega, x) - S_n(f, x)| < +\infty \tag{7}$$

на отрезке $[0, 2\pi]$, за исключением, быть может, некоторого счетного множества (такой подход встречается у А. Гарнака ([3]), с. 225).

Теорема 3. *Если тригонометрический ряд* Ω *удовлетворяет условиям* (1), (6) *и* (7), *то* Ω *есть ряд Фурье функции* f.

Здесь условия (1) и (7) очевидно необходимы, но условие (6) для рядов Фурье, вообще говоря, не имеет смысла. Поэтому целесообразно вместо частичных сумм рассматривать $(C, 1)$ средние ряда.

Теорема 4. *Для того чтобы тригонометрический ряд* Ω

являлся рядом Фурье функции $f(x) \in L[0, 2\pi]$, необходимо и достаточно, чтобы Ω удовлетворял условиям (1), (7) *и*

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\, \sigma_n(\Omega, x) \leqslant f(x) \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}}\, \sigma_n(\Omega, x) \quad \text{п. в. на } [0, 2\pi]. \tag{8}$$

Если рассматривать ряды $\Omega \in \{\Omega\}^*$, то условие (8) также достаточно, чтобы Ω был рядом Фурье.

Теорема 5. *Если $\Omega \in \{\Omega\}^*$ и удовлетворяет условию* (8), *то Ω является рядом Фурье функции f.*

Отметим, что здесь в условии (8) нельзя $(C, 1)$ средние заменить частичными суммами, сохранив полностью утверждение: С. Ю. Лукашенко ([4]) построен пример ряда Фурье Ω, который удовлетворяет условию (2) на отрезке $[0, 2\pi]$, и вместе с тем пределы неопределенности ряда Ω равны лишь на множестве E, $\operatorname{mes} E < \varepsilon$ для наперед заданного $\varepsilon > 0$. При этом нетрудно убедиться, что Ω удовлетворяет также условию (3).

Таким образом, для рядов $\Omega \in \{\Omega\}^*$ условие

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\, S_n(\Omega, x) \leqslant f(x) \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}}\, S_n(\Omega, x),$$

которое выполняется всюду на отрезке $[0, 2\pi]$ для некоторой конечной и суммируемой на $[0, 2\pi]$ функции f, еще не гарантирует, что Ω является рядом Фурье именно функции f, но является ли оно достаточным, чтобы имело место (5) и Ω являлся рядом Фурье, не ясно.

Вместе с тем справедливо следующее усиление теоремы В.

Теорема 6. *Пусть $\Omega \in \{\Omega\}^*$ и $f(x) \in L^p[0, 2\pi]$ для некоторого $p > 1$. Тогда, если для какого-либо регулярного метода T*

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\, t_n(\Omega, x) \leqslant f(x) \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}}\, t_n(\Omega, x) \quad \text{п. в. на } [0, 2\pi],$$

то Ω является рядом Фурье функции f. В частности, если ряд $\Omega \in \{\Omega\}^*$ суммируется к нулю каким-либо регулярным методом п. в. на $[0, 2\pi]$, то $\Omega \equiv 0$.

Вышеупомянутый пример С. Ю. Лукашенко показывает, что тригонометрический ряд может сходиться к конечной и суммируемой функции на некотором множестве $E \subset [0, 2\pi]$, $\operatorname{mes} E < 2\pi$ и вместе с тем ограниченно расходиться в остальных точках отрезка $[0, 2\pi]$.

Возникает вопрос: существует ли тригонометрический ряд, который сходится к нулю на некотором множестве $E \subset [0, 2\pi]$ и ограниченно расходится в остальных точках отрезка $[0, 2\pi]$ (по этому поводу см. ([2]), с. 434).

Справедливы следующие утверждения.

Теорема 7. *Никакой тригонометрический ряд не может сходиться к конечной функции $f(x)$ на каком-либо множестве $E \subset [0, 2\pi]$ и ограниченно расходиться на $[0, 2\pi] - E$, если $f(x)$ является сужением на E некоторой функции, ряд Фурье которой сходится всюду. В частности, никакой тригонометрический ряд не может сходиться к нулю на каком-либо множестве $E \subset [0, 2\pi]$ и вместе с тем ограниченно расходиться на $[0, 2\pi] - E$.*

Теорема 8. *Никакой тригонометрический ряд не может* *сходиться к конечной функции* $f(x)\in L^p(E)$, $p>1$ *на каком-либо множестве* $E\subset[0, 2\pi]$, $\mathrm{mes}E<2\pi$ *и вместе с тем ограниченно расходиться в остальных точках отрезка* $[0, 2\pi]$.

Обозначим через $E(s, \Omega)$ множество точек сходимости, а через $E(c, \Omega)$ множество точек $(C, 1)$ суммируемости (к конечному числу) ряда Ω на отрезке $[0, 2\pi]$.

Вышеприведенные утверждения (кроме теоремы 2) являются следствиями следующих двух теорем.

Теорема 9. *Пусть* $\Omega\in\{\Omega\}^*$ *и* $f(\Omega, x)\in L(E(c, \Omega))$. *Тогда* $\mathrm{mes}E(c, \Omega)=2\pi$ *и* Ω *является рядом Фурье функции* $f(\Omega, x)$.

Теорема 10. *Пусть* $\Omega\in\{\Omega\}^*$ *и* $f(\Omega, x)\in L^p(E(s, \Omega))$ *для некоторого* $p>1$. *Тогда* $\mathrm{mes}\,E(s, \Omega)=2\pi$ *и* Ω *является рядом Фурье функции* $f(\Omega, x)$.

Армянский педагогический институт
им. Х. Абовяна

Լ. Ա. ՇԱՀԻՆՅԱՆ

Եռանկյունաչափական շարքերի միակության մասին

Դիցուք Ω*-ն ընդհանուր տեսքի եռանկյունաչափական շարք է, իսկ* $\underline{S}(\Omega, x)$ *և* $\overline{S}(\Omega, x)$ *ֆունկցիաները համապատասխանաբար նրա մասնական գումարների ստորին և վերին սահմաններն են։*

Աշխատանքում դիտարկվում է այն հարցը, թե երբ 0-ի ձգտող գործակիցներով Ω *եռանկյունաչափական շարքը կլինի Ֆուրյե-Լեբեգի շարք, եթե* $\underline{S}(\Omega, x)$ *և* $\overline{S}(\Omega, x)$ *ֆունկցիաները վերջավոր են ամենուրեք, բացի գուցե մի հաշվելի բազմությունից։*

Համաձայն Վալլե—Պուսենի թեորեմի, դրա համար բավական է, որ

$$\underline{S}(\Omega, x),\quad \overline{S}(\Omega, x)\in L[0, 2\pi]. \tag{*}$$

Աշխատանքում մասնավորապես պարզաբանվում է, որ (*) պայմանը անհրաժեշտ չէ, իսկ

$$\underline{S}(\Omega, x)+\overline{S}(\Omega, x)\in L[0, 2\pi]$$

պայմանը արդեն անհրաժեշտ և բավարար է, որպեսզի վերը նշված դասից Ω *շարքը հանդիսանա*

$$\frac{1}{2}\{\underline{S}(\Omega, x)+\overline{S}(\Omega, x)\}$$

ֆունկցիայի Ֆուրյե-Լեբեգի շարքը։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Ш. Ж. де ла Валле-Пуссен,* Курс анализа бесконечно малых, т. II, ГТТИ, 1933. [2] *Н. К. Бари,* Тригонометрические ряды, Физматгиз, М., 1961. [3] *А. Б. Паплаускас,* Тригонометрические ряды от Эйлера до Лебега, Наука, М., 1966. [4] *С. Ю. Лукашенко,* Мат. заметки, т. 27, вып. 4 (1980).