ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXVIII 1984 3

МАТЕМАТИКА

УДК 517.544

А. А. Шагинян

О разрешимости задачи Дирихле для гармонических функций в неограниченных областях евклидовых пространств и на открытых Римановых поверхностях

(Представлено чл.-корр АН Армянской ССР Р. А. Александряном 28/X 1982)

Вопрос о разрешимости задачи Дирихле для гармонических функций в ограниченных областях для непрерывной граничной функции рассматривался в ряде работ. В терминах емкостей окончательное решение было получено Н. Винером. Естественное обобщение этой задачи на случай неограниченных областей или разрывных граничных функций также рассматривалось во многих работах.

В настоящей заметке мы приводим описание неограниченных областей в $R^n (n\geqslant 2)$ и областей с некомпактным замыканием на произвольных открытых Римановых поверхностях, для которых разрешима задача Дирихле для гармонических функций с непрерывными граничными данными.

При доказательстве полученных теорем существенно используется теорема о гармонической аппроксимации с касанием [1]. Пусть $D\subset R^n (n\geqslant 2)$ произвольная область с непустой границей ∂D. Обозначим через B_n шары радиуса n с центром в начале координат, а через D_i^k компоненты с компактным замыканием множества $D\setminus B_k$. Множество $\overline{B_n\cup\{\bigcup_i D_i^n\}}$ будем называть оболочкой B_n и обозначим через $O_D(B_n)$.

Теорема 1. *Для того чтобы для всякой непрерывной на ∂D действительной функции $f(P)$ существовала гармоническая в D и непрерывная в $\overline{D}$ функция $H(P)$ такая, что $H(P)=f(P)$ на ∂D, необходимо и достаточно совместное выполнение следующих двух условий:*

1. *все точки границы ∂D регулярны (расходится ряд Винера);*
2. *оболочки $O_D(B_n)$ компактны при всех n.*

Аналогичная задача может быть рассмотрена для произвольных открытых Римановых поверхностей. Для бордированных Римановых поверхностей эта задача была решена С. Шейнбергом [2]. Пусть R произвольная открытая Риманова поверхность, а D область на R с непустой границей ∂D. Для произвольного нормального исчерпания $\{F_n\}$ поверхности R обозначим через $\{D_i^k\}$ компоненты с компактным замыканием множества $D\setminus F_k$. Множество $\overline{F_n\cup\{\bigcup_i D_i^n\}}$ будем называть оболочкой F_n и обозначим через $O(F_n)$. Решение задачи о разрешимости задачи Дирихле в D дает следующая

Теорема 2. *Для того чтобы для всякой непрерывной на ∂D действительной функции $f(z)$ существовала гармоническая в D и непрерывная в $\overline{D}$ функция $H(z)$ такая, что $H(z)=f(z)$ на ∂C, необходимо и достаточно, чтобы*

1. *все граничные точки ∂D были регулярны (достаточно, чтобы компонента границы, содержащая произвольную граничную точку, не сводилась к одной точке);*

2. *оболочки $O_D(F_n)$ были компактны при всяком n.*

Ереванский государственный университет

Ա. Ա. ՇԱՀԻՆՅԱՆ

Դիրիխլեի խնդրի լուծելիության մասին էվկլիդյան տարածության անսահմանափակ տիրույթներում և բաց ռիմանյան մակերևույթների վրա

Դիցուք $D \subset R^n (n \geq 2)$ կամայական տիրույթ է ոչ դատարկ եզրով ∂D, B_n-ը n շառավիղի գնդեր են, որոնց կենտրոնները համընկնում են սկզբնակետի հետ, իսկ D_i^n $D \setminus \overline{B}_n$-ի կոմպակտ փակույթ ունեցող կոմպոնենտներն են։

Նշանակենք $O_D(B_n)$-ով $\overline{B_n \cup \{\bigcup_i D_i^n\}}$ բազմությունը։ Աշխատանքում ստացված հիմնական արդյունքը հետևյալն է՝

Թեորեմ։ Որպեսզի ∂D-ի վրա որոշված կամայական անընդհատ $f(p)$ ֆունկցիայի համար գոյություն ունենա հարմոնիկ D-ում և անընդհատ $\overline{D}$-ում $H(p)$ ֆունկցիա այնպիսի որ, $H(p)=f(p)$, երբ $p \in \partial D$ անհրաժեշտ է և բավարար հետևյալ երկու պայմանների միաժամանակ կատարումը։

1. ∂D բոլոր կետերը ռեգուլյար են։
2. $O_D(B_n)$-ը կոմպակտ է բոլոր n-երի համար։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *А. А. Шагинян*, Мат. заметки, т. 9, вып. 2 (1971). [2] *S. Scheinberg*, Ann. of Math., v. 102, p. 139—141 (1975).