

УДК 517.984

И. Г. Хачатрян

О некоторых решениях уравнения нелинейной струны

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 25/II 1983)

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$a \frac{\partial u}{\partial t} = 2 \frac{\partial w}{\partial x}, \quad a \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{1}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - \frac{1}{3} \frac{\partial u^2}{\partial x}, \quad (1)$$

$$-\infty < t, x < \infty.$$

где $a \neq 0$ — вещественное число. Очевидно, что систему (1) можно свести к одному уравнению

$$3a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - 2 \frac{\partial^2 u^2}{\partial x^2}. \quad (2)$$

При помощи подстановки $u(t, x) = cv(t, x) + b$ уравнение (2) перепишем в виде

$$3a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + 4b \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} - 2c \frac{\partial^2 v^2}{\partial x^2}. \quad (3)$$

При $a^2 = \frac{4}{3}$, $b = -1$, $c = -\frac{3}{2}$ (3) совпадает с уравнением нелинейной струны (1), а при $a^2 = \frac{1}{3}$, $b = -\frac{1}{4}$, $c = -\frac{3}{2}$ мы получим рассмотренное в (2) уравнение Буссинеска.

Согласно результатам работы (1), если ядро $F(t; x, \xi)$ ($-\infty < t, x, \xi < \infty$) удовлетворяет уравнениям

$$\frac{\partial^3 F}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 F}{\partial \xi^3} = 0, \quad \frac{a}{i} \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} = 0, \quad (4)$$

и, кроме того, при любых фиксированных t и x относительно функции $K(t; x, \xi)$ ($\xi \geq x$) разрешимо интегральное уравнение (аналог уравнения Гельфанда—Левитана—Марченко)

$$K(t; x, \xi) + F(t; x, \xi) + \int_x^\xi K(t; x, \eta) F(t; \eta, \xi) d\eta = 0, \quad (5)$$

то пара функций $u(t, x)$ и $w(t, x)$, определенных по формулам

$$u(t, x) = -3 \left[\frac{\partial}{\partial x} K(t; x, \xi) + \frac{\partial}{\partial \xi} K(t; x, \xi) \right]_{\xi=x}, \quad (6)$$

$$w(t, x) = 3i \left\{ K(t; x, \xi) \left[\frac{\partial}{\partial x} K(t; x, \xi) + \frac{\partial}{\partial \xi} K(t; x, \xi) \right] + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} K(t; x, \xi) - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} K(t; x, \xi) \right\} \Big|_{\xi=x}, \quad (7)$$

является решением системы уравнений (1).

В работе (1) рассматриваются вырожденные ядра $F(t; x, \xi)$, удовлетворяющие указанным выше условиям (см. в связи с этим также работу (2)).

В настоящей заметке указывается класс удовлетворяющих уравнениям (4) невырожденных эрмитовых ядер $F(t; x, \xi)$ ($F(t; x, \xi) = \overline{F(t; \xi, x)}$), при которых разрешимо интегральное уравнение (5). При этом определенные по формулам (6) и (7) решения системы (1) вещественны и убывают при $x \rightarrow +\infty$.

С этой целью удобно ввести обозначения

$$K_0(t; x, \xi) = K(t; x, x + \xi), \\ G(t, x; \eta, \xi) = F(t; x + \eta, x + \xi), \\ -\infty < t, x < \infty, \quad 0 \leq \eta, \xi < \infty,$$

и привести соотношения (4)–(7) к виду

$$\frac{\partial^3 G}{\partial \eta^3} + \frac{\partial^3 G}{\partial \xi^3} = 0, \quad \frac{a}{i} \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{\partial^2 G}{\partial \eta^2} - \frac{\partial^2 G}{\partial \xi^2} = 0, \quad (8)$$

$$K_0(t; x, \xi) + G(t, x; 0, \xi) + \int_0^\infty K_0(t; x, \eta) G(t, x; \eta, \xi) d\eta = 0, \quad (9)$$

$$u(t, x) = -3 \frac{\partial}{\partial x} K_0(t; x, 0), \quad (10)$$

$$w(t, x) = 3i \left[K_0(t; x, 0) \frac{\partial}{\partial x} K_0(t; x, 0) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} K_0(t; x, 0) - \frac{\partial^2}{\partial x \partial \xi} K_0(t; x, \xi) \right] \Big|_{\xi=0}. \quad (11)$$

Пусть $S(\lambda)$ ($-\infty < \lambda < \infty$) — дважды непрерывно дифференцируемая финитная функция, причём $S(0) = 0$. Рассмотрим вместе с этой функцией четыре конечных набора положительных чисел

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n; \quad N_1, N_2, \dots, N_n; \\ \mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_m; \quad M_1, M_2, \dots, M_m.$$

Ядро $G(t, z; \eta, \xi)$ определим по формуле

$$G(t, z; \eta, \xi) = \int_0^\infty S(\lambda) \exp \left\{ \frac{\lambda}{2} \left[(\sqrt{3} - 3i) \frac{\lambda t}{a} - (\sqrt{3} + 3i) z - (\sqrt{3} + i) \eta - 2i\xi \right] \right\} d\lambda + \\ + \int_0^\infty \overline{S(\lambda)} \exp \left\{ \frac{\lambda}{2} \left[(\sqrt{3} + 3i) \frac{\lambda t}{a} - (\sqrt{3} - 3i) z + 2i\eta - (\sqrt{3} - i)\xi \right] \right\} d\lambda +$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^\infty 2\pi |S(\lambda)|^2 \exp \left\{ \frac{\lambda}{2} \left[2\sqrt{3} \left(\frac{\lambda t}{a} - z \right) - (\sqrt{3} + i)\eta - (\sqrt{3} - i)\xi \right] \right\} d\lambda + \\
& + \int_{-\infty}^0 S(\lambda) \exp \left\{ \frac{\lambda}{2} \left[-(\sqrt{3} + 3i) \frac{\lambda t}{a} + (\sqrt{3} - 3i)z + (\sqrt{3} - i)\eta - 2i\xi \right] \right\} d\lambda + \\
& + \int_{-\infty}^0 \bar{S}(\lambda) \exp \left\{ \frac{\lambda}{2} \left[-(\sqrt{3} - 3i) \frac{\lambda t}{a} + (\sqrt{3} + 3i)z + 2i\eta + (\sqrt{3} + i)\xi \right] \right\} d\lambda + \\
& + \int_{-\infty}^0 2\pi |S(\lambda)|^2 \exp \left\{ \frac{\lambda}{2} \left[-2\sqrt{3} \left(\frac{\lambda t}{a} - z \right) + (\sqrt{3} - i)\eta + (\sqrt{3} + i)\xi \right] \right\} d\lambda + \\
& + \sum_{k=1}^n N_k \exp \left\{ \frac{\lambda_k}{2} \left[2\sqrt{3} \left(\frac{\lambda_k t}{a} - z \right) - (\sqrt{3} + i)\eta - (\sqrt{3} - i)\xi \right] \right\} + \\
& + \sum_{k=1}^m M_k \exp \left\{ \frac{\mu_k}{2} \left[-2\sqrt{3} \left(\frac{\mu_k t}{a} + z \right) - (\sqrt{3} - i)\eta - (\sqrt{3} + i)\xi \right] \right\}. \quad (12)
\end{aligned}$$

Легко убедиться, что построенное ядро $G(t, z; \eta, \xi)$ удовлетворяет уравнениям (8) и является целой функцией переменной z . Кроме того, справедливы оценки

$$|G(t, z; \eta, \xi)| \leq c_1(t, z)(\eta + \xi + 1)^{-2}, \quad (13)$$

$$|G(t, z; \eta, \xi)| \leq c_2(t)(z + \eta + \xi + 1)^{-2}, \quad z > 0, \quad (14)$$

$$-\infty < t < \infty, \quad 0 \leq \eta, \xi < \infty,$$

где $c_1(t, z)$ и $c_2(t)$ — некоторые положительные функции. При каждом комплексном z определим в пространстве $L^2(0, \infty)$ интегральный оператор G_z по формуле

$$G_z f(\xi) = \int_0^\infty G(t, z; \eta, \xi) f(\eta) d\eta, \quad 0 < \xi < \infty. \quad (15)$$

Покажем, что при всех вещественных z оператор $I + G_z$ обратим, где I — единичный оператор. С этой целью нам понадобятся следующие свойства оператора G_z , которые легко следуют из формулы (12) и оценок (13), (14).

- 1°. При каждом z оператор G_z вполне непрерывен.
- 2°. G_z является голоморфной оператор-функцией от z .
- 3°. $\|G_z\| \rightarrow 0$ при $z \rightarrow +\infty$.
- 4°. $(I + G_z) \geq 0$ при $\operatorname{Im} z = 0$.
- 5°. При каждом $x > 0$ имеет место равенство

$$G_z = B_\alpha G_{z-\alpha} B_\alpha, \quad (19)$$

где операторы B_α и B_α^* определяются по формулам

$$B_\alpha f(\xi) = \begin{cases} f(\xi - \alpha) & \text{при } \xi > \alpha, \\ 0 & \text{при } 0 < \xi < \alpha, \end{cases}$$

$$B_\alpha^* f(\xi) = f(\xi + \alpha), \quad \xi > 0,$$

и, следовательно, $B_\alpha^* B_\alpha = I$.

Обратимость оператора $I + G_z$ при $\operatorname{Im} z = 0$ докажем исходя из обратного предположения. Пусть при некотором вещественном значении $z = x$ для отличного от нуля элемента $f \in L^2(0, \infty)$ имеет место равенство $f + G_x f = 0$. Тогда $(f + G_x f, f) = 0$. Отсюда в силу (16) при любом $\alpha > 0$ получим

$$(B_\alpha^* [I + G_{x-\alpha}] B_\alpha f, f) = 0.$$

Следовательно, $([I + G_{x-\alpha}] B_\alpha f, B_\alpha f) = 0$ и в силу свойства 4^а

$$(I + G_{x-\alpha}) B_\alpha f = 0. \quad (17)$$

Поскольку $B_\alpha f \neq 0$, то согласно (17) при любом $\alpha > 0$ оператор $I + G_{x-\alpha}$ не имеет обратного. Однако в силу свойств 1^а–3^а оператор $I + G_z$ обратим для всех z за исключением, быть может, счетного множества значений, не имеющих конечной точки сгущения. Полученное противоречие доказывает обратимость оператора $I + G_z$ при всех вещественных z .

Таким образом, для определенного по формуле (12) ядра $G(t, x; \eta, \xi)$ интегральное уравнение (9) разрешимо при всех вещественных t и x . При этом можно доказать, что определенные формулами (10) и (11) функции $u(t, x)$ и $w(t, x)$ вещественны и убывают при $x \rightarrow +\infty$.

Нетрудно заметить, что приведенные выше утверждения справедливы не только при финитных, но и при достаточно быстро убывающих на бесконечности функциях $S(\lambda)$.

Аналогично могут быть построены убывающие при $x \rightarrow -\infty$ решения системы уравнений (1).

Отыскание достаточных условий на функцию $S(\lambda) \neq 0$, при которых определенные формулами (10) и (11) функции $u(t, x)$ и $w(t, x)$ убывают при $x \rightarrow \pm\infty$, связано с рядом затруднений. В связи с этим отметим лишь, что если указанные функции $u(t, x)$ и $w(t, x)$ при некотором значении t суммируемы по x на всей оси $(-\infty, \infty)$, то функция $S(\lambda)$ необходимо должна быть мероморфной в каждом из секторов $0 < \arg \lambda < \frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6} < \arg \lambda < \pi$ и непрерывной на полуосях $(0, \infty)$, $(\infty-, 0)$ (3).

Ոչ գծային լարի հավասարման որոշ լուծումների մասին

Դիտարկվում է գիֆերենցիալ հավասարումների հետևյալ համակարգը.

$$a \frac{\partial u}{\partial t} = 2 \frac{\partial w}{\partial x}, \quad a \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{1}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - \frac{1}{3} \frac{\partial u^2}{\partial x},$$

$$-\infty < t, \quad x < \infty,$$

որտեղ՝ a -ն զրոյից տարբեր իրական թիվ է: Յրման հակադարձ խնդրի մեթոդով կառուցվում են այդ համակարգի որոշ լուծումներ, որոնք նվազում են, երբ $x \rightarrow +\infty$:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ В. Е. Захаров, А. Б. Шабат, Функц. анализ и его прилож., т. 8, № 3 (1974).
² P. J. Caudrey, Physica 6 D, 51—66 (1982). ³ И. Г. Хачатрян, Изв. АН АрмССР, Математика, т. 18, № 5 (1983).