ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXVIII 1984 2

МАТЕМАТИКА

УДК 514.8/88

С. Д. Григорян

Геометрическое исследование конических течений гравитирующего газа

(Представлено чл.-корр АН Армянской ССР Р. А. Александряном 20/I 1983)

1. В данной работе методы качественной теории динамических систем применяются для исследования известной астрофизической задачи о стационарной аккреции идеального газа на массивную звезду. Задача рассматривается в рамках классической ньютоновской теории при следующих предположениях: 1) масса звезды M много больше массы газа, находящегося в ее окрестности; 2) движение газа принадлежит к классу «конических течений», т. е. в цилиндрических координатах r, φ, z все параметры газа существенно зависят только от одной переменной $\lambda = z/r$. При такой идеализации самогравитацией газа можно пренебречь, и задача сводится к изучению конических течений газа в поле притягивающего центра.

Конические течения газа без гравитации исследовались впервые в классической работе ([1]) при изучении движения тела конической формы в воздухе. Многочисленные астрофизические приложения рассматриваемой задачи также хорошо известны (см., например, ([2])).

2. Уравнения газовой динамики для стационарных течений газа с осевой симметрией в поле притягивающего центра имеют в цилиндрических координатах следующий вид:

$$v\frac{\partial v}{\partial r} + u\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{w^2}{r} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} - \frac{rGM}{(r^2+z^2)^{3/2}};$$

$$v\frac{\partial w}{\partial r} + u\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{vw}{r} = 0;$$

$$v\frac{\partial u}{\partial r} + u\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} - \frac{zGM}{(r^2+z^2)^{3/2}};$$

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial r} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial z} + \frac{\rho v}{r} = 0; \qquad v\frac{\partial(p/\rho^\gamma)}{\partial r} + u\frac{\partial(p/\rho^\gamma)}{\partial z} = 0.$$

Здесь v, u, w—радиальная, осевая и вращательная компоненты скорости газа, p—давление, ρ—плотность газа, $\gamma < 1$—показатель адиабаты, G—гравитационная постоянная.

Параметры газа в конических течениях имеют следующий вид:

$$\rho = \frac{a}{r^s}R(\lambda), \quad p = \frac{ab^2}{r^s}r^{2k}P(\lambda), \quad \lambda = \frac{z}{r}, \tag{2}$$

$$v=br^k V(\lambda),\quad u=br^k U(\lambda),\quad w=br^k\Omega(\lambda),$$

где константы a и b имеют размерности $[a]=ML^{s-3}$, $[b]=L^{1-k}T^{-1}$, k и s—безразмерные константы. Из условия конечности массы газа в окрестности центра следует, что $s<3$.

Система уравнений (1) имеет решение вида (2) только при $k=-\frac{1}{2}$. Введем угловую координату $\theta=\operatorname{arctg}\lambda$ и следующие компоненты скорости V_t, V_n (V_t—скорость, направленная по лучу $\lambda=\text{const}$, V_n ортогональна V_t):

$$V_t=(\lambda U+V)/(1+\lambda^2)^{\frac{1}{2}},\quad V_n=(U-\lambda V)/(1+\lambda^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Система уравнений (1) для конических течений (2) при $k=-\frac{1}{2}$ после преобразования в новые координаты

$$x(\theta)=(2m)^{-\frac{1}{2}}V_n(1+\lambda^2)^{\frac{1}{4}},\quad y(\theta)=(2m)^{-\frac{1}{2}}V_t(1+\lambda^2)^{\frac{1}{4}},$$

$$\psi(\theta)=(2m)^{-\frac{1}{2}}\Omega(1+\lambda^2)^{\frac{1}{4}},\qquad z_0(\theta)=\frac{\gamma\ P}{m(\gamma-1)R}(1+\lambda^2)^{\frac{1}{4}},\tag{3}$$

$$R=R(\theta),\quad \theta=\operatorname{arctg}\lambda$$

переходит в следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx}{d\theta}=x'=\frac{y\left(\frac{1}{2}x^2-\varkappa\frac{\gamma-1}{2}z_0\right)+x\operatorname{tg}\theta\left(\psi^2+\frac{\gamma-1}{2}z_0\right)}{x^2-\frac{\gamma-1}{2}z_0};$$

$$y'=\frac{1}{2x}\left(2x+y^2+2\psi^2+\left(\frac{3}{2}-\varkappa\right)(\gamma-1)z_0-1\right);\tag{4}$$

$$\psi'=\frac{\psi}{2x}(2x\operatorname{tg}\theta-y);$$

$$\frac{z_0'}{z_0}=-(\gamma-1)\frac{x'}{x}+\frac{1}{2x}\left[\left(s-\frac{3}{2}\gamma\right)y+2(\gamma-1)x\operatorname{tg}\theta\right].$$

Уравнение на функцию $R(\theta)$ отделяется

$$\frac{R'}{R}=-\frac{x'}{x}+\frac{1}{x}\left[\left(s-\frac{3}{2}\right)y+(1-s)x\operatorname{tg}\theta\right].\tag{5}$$

Здесь параметр $\varkappa=\frac{3}{2}-(s+1)/\gamma$. Замкнутая система уравнений (4) полностью определяет стационарные конические течения газа в поле притягивающего центра.

3. Утверждение 1. *Система уравнений (4) имеет два первых интеграла*

$$F_1=z_0(x\cos\theta)^{\gamma-1}(\psi\cos\theta)^{s-3\gamma}=\text{const},\tag{6}$$

$$F_2=H_0\psi^2\cos^2\theta=\text{const},\tag{7}$$

где

$$H_0 = z_0 + x^2 + y^2 + \psi^2 - 1. \tag{8}$$

Вследствие наличия двух интегралов (6), (7) система четырех дифференциальных уравнений (4) сводится к неавтономной системе двух уравнений в плоскости x, y. После такого понижения порядка исследование системы проводится на основе классических методов качественной теории. Важнейшей особенностью системы (4) является наличие поверхности непродолжимости решений $L = x^2 - \frac{\gamma-1}{2} z_0$. Производная x' на противоположных сторонах этой поверхности равна $\pm\infty$ и меняет знак; поэтому траектории, пересекающие поверхность $L=0$, могут быть продолжены при всех значениях $\theta \left(-\frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$ только после введения разрыва. Существование поверхности непродолжимости решений для системы (4) приводит к возникновению ударных волн в конических течениях газа.

На ударной волне $\lambda = z/r = \text{const}$, поэтому поверхность ударной волны в трехмерном пространстве является конусом.

Условия Гюгониё ([2,3]) сшивки решений на двух сторонах разрыва (индексы 1 и 2) имеют вид:

$$y_1 = y_2, \quad \psi_1 = \psi_2, \quad z_{0_1} + x_1^2 = z_{0_2} + x_2^2,$$

$$\frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{z_{0_1}}{x_1} + x_1 = \frac{\gamma-1}{2\gamma} \frac{z_{0_2}}{x_2} + x_2, \quad R_1 x_1 = R_2 x_2. \tag{9}$$

Преобразование (9) обозначим через τ. Отметим, что величина H_0 не меняется при преобразовании τ.

Рассмотрим решения, для которых $H_0 \leqslant 0$; только в таком случае возможна аккреция газа на центр. В плоскости x, y получаем $x^2 + y^2 \leqslant 1 - z_0 - \psi^2 \leqslant 1$ (поскольку $z_0 \geqslant 0$ согласно определению (3)). Поэтому при $H_0 \leqslant 0$ траектории системы на плоскости x, y движутся внутри единичного круга $D: x^2 + y^2 \leqslant 1$. Из условия $H_0 \leqslant 0$ следует, что z_0, $|x|$, $|y|$, $|\psi| \leqslant 1$; поэтому из существования первого интеграла F_1 (6) получаем, что решения, для которых $F_1 \neq 0 (|z_0|, |\psi| \neq 0)$, не существуют при $|\theta| \to \pi/2$ (при $\gamma \leqslant 5/3$). Этот факт означает, что в соответствующих решениях в трехмерном пространстве имеются два пустых стационарных конуса и газ заполняет пространство между ними. Для построения решений, определенных во всем пространстве при $H_0 \leqslant 0$, необходимо предположить, что $\psi = 0$, т. е. вращение газа отсутствует.

Качественное исследование системы (4) при $\psi = 0$, $H_0 \leqslant 0$ показывает, что решения, продолжимые при $\theta \to \pi/2$, имеют асимптотику

$$x = \alpha \cos\theta, \quad y = -1 + \beta x^2, \quad z_0 = 2x^2/k(\gamma-1),$$

$$\alpha = \frac{5-3\gamma}{4\gamma}, \quad \beta = \gamma \frac{4 + (\gamma-1)(2\varkappa-3)}{2(5+\gamma(2\varkappa-3)(\gamma-1))}, \tag{10}$$

$$k=2(5+\gamma(2\varkappa-3))/(5-\gamma).$$

Эта асимптотика имеет смысл при $k>0$, или при $s<3/2\left(\gamma\leqslant\frac{5}{3}\right)$. При этом параметры газа при $\theta\to\pi/2$ имеют следующее асимптотическое поведение:

$$v=-(2GM)^{1/2}\frac{(5+\gamma)r}{4\gamma z^{3/2}},\quad u=-(2GM)^{1/2}/z^{1/2},\quad w=0,$$

$$\rho=ac_0\frac{1}{r^s}\left(\frac{z}{r}\right)^{10-(5+\gamma)s},\quad p=2ac_0\frac{GM}{\gamma k}\frac{1}{r^{1+s}}\left(\frac{z}{r}\right)^{7-(5+\gamma)s}. \tag{11}$$

Асимптотики (10), (11) при $\alpha>0(\gamma<5/3)$ описывают аккрецию газа на центр ($r=z=0$); частицы газа в асимптотике (11) падают на центр, касаясь кривых

$$z=c_1r^{4\gamma(5+\gamma)}, \tag{12}$$

которые при $\gamma<5/3$ касаются оси z.

Проведем построение важного решения, описывающего стационарную аккрецию газа с сильной (см. ([3])) конической ударной волной. Решение за фронтом ударной волны описывается траекторией S_1, имеющей асимптотику (10). Решение перед фронтом ударной волны описывает движение холодного газа ($z_0\equiv0$) и соответствует траектории S_2:

$$x=\sin\left(\frac{1}{2}(\theta-\theta_0)\right),\quad y=-\cos\left(\frac{1}{2}(\theta-\theta_0)\right). \tag{13}$$

Очевидно, траектория S_2 (13) движется по границе единичного круга $D_2(x^2+y^2\leqslant1)$.

Теорема 1. *Кривые S_1 и $\tau(S_2)$ при всех значениях параметра s из окрестности точки $s_0=(\gamma^2+6\gamma+5)/8\gamma$ имеют точку пересечения, лежащую внутри круга D_2.*

Действительно, кривая $\tau(S_2)$ является эллипсом

$$((\gamma+1)/(\gamma-1))^2\ x^2+y^2=1. \tag{14}$$

Эллипс E_1 (14) пересекается с кривой S_1 (10) в точке $Y_1(x=0,\ y=-1)$. Кривая S_1 в окрестности точки Y_1 при $\beta>\beta_0=\frac{1}{2}\left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\right)^2$ лежит внутри эллипса E_1, а при $\beta<\beta_0$ — вне эллипса E_1. Условию $\beta=\beta_0$ в силу (10) соответствует $s=s_0=(\gamma^2+6\gamma+5)/8\gamma$. При $1<\gamma<5/3$ имеем $3/2>s>4/3$, т. е. s_0 находится в физически допустимой области. При вариации s в окрестности точки $s=s_0$ траектория S_1 переходит в окрестности точки Y_1 с одной стороны эллипса E_1 на другую сторону. Поэтому в целой окрестности точки $s=s_0$ существует лежащее внутри круга D_2 пересечение двух кривых S_1 и $E_2=\tau(S_2)$.

Пусть указанное пересечение происходит при $\theta=\theta_1$. Тогда существует следующее решение:

1) при $-\pi/2<\theta<\theta_1$ движение газа соответствует траектории S_2 (13);

2) при $\theta=\theta_1$ происходит разрыв решения, конус $z=(\mathrm{tg}\theta_1)r$ является поверхностью ударной волны;

3) при $\theta_1<\theta<\pi/2$ движение газа соответствует траектории S_1 и имеет асимптотику (11) при $\theta\to\pi/2$.

В силу доказанной теоремы 1 на поверхности ударной волны $z=r\,\mathrm{tg}\theta_1$ выполнены условия Гюгонне (9), поэтому построенное решение удовлетворяет всем необходимым физическим условиям и описывает стационарную аккрецию газа с сильной ударной волной.

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Ս. Դ. ԳՐԻԳՈՐՅԱՆ

Գրավիտացվող գազի կոնական հոսքերի երկրաչափական հետազոտությունը

Աշխատանքում հետազոտվում է դինամիկ համակարգ, որը նկարագրում է իդեալական գազի ստացիոնար կոնական հոսքերը ձգողական կենտրոնի դաշտում։

Գտնված են այդ դինամիկ համակարգի առաջին ինտեգրալները, որոնք թույլ են տալիս դիտարկվող համակարգը բերել երկու ոչ ավտոնոմ դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգի։ Որից հետո համակարգի հետազոտությունը անցկացվում է դինամիկ համակարգերի որակական տեսության դասական մեթոդներով։ Այդ մեթոդների օգնությամբ ապացուցված է ուժեղ կոնական հարվածային ալիքով լուծման գոյությունը, որը որոշված է ամբողջ տարածության մեջ և նկարագրում է գրավիտացվող գազի ստացիոնար ակրեցիան։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *G. I. Taylor, J. W. Maccoll*, Proc. Roy. Soc., A 139, 278—311 (1944). [2] *Г. С. Бисноватый-Коган, Я. М. Каждан, А. А. Клыпин* и др., Астрономический журн., т. 56, вып. 2 (1979). [3] *Л. И. Седов*, Методы подобия и размерности в механике, Наука, М., 1979. [4] *Г. Биркгоф*, Гидродинамика. Факты. Подобие. Пер с англ. под ред. М. И. Гуревича и В. А. Смирнова, ИЛ, М., 1963.