ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
LXXVIII 1984 2

УДК 510.4

МАТЕМАТИКА

Ю. М. Мовсисян

О многообразиях алгебр, определенных некоторыми сверхтождествами

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. А. Александряном 1/XI 1982)

В настоящей работе исследуются бинарные алгебры со сверхтождествами:

$X(x, x)=x$ — сверхтождество идемпотентности;
$X(x, y)=X(y, x)$ — сверхтождество коммутативности;
$X[Y(x, y), Y(u, v)]=Y[X(x, u), X(y, v)]$ — сверхтождество абелевости;
$X[x, Y(y, z)]=Y[X(x, y), X(x, z)]$ — сверхтождество левой дистрибутивности;
$X[Y(x, y), z]=Y[X(x, z), X(y, z)]$ — сверхтождество правой дистрибутивности.

Алгебру $\langle Q; \Sigma\rangle$, удовлетворяющую сверхтождествам левой и правой дистрибутивности (идемпотентности, коммутативности, абелевости), для краткости назовем дистрибутивной (идемпотентной, коммутативной, абелевой).

Будем рассматривать еще следующие сверхтождества:

$$X[x, Y(x, x)=Y[x, X(x, x)]; \tag{1}$$

$$X[Y(x, x), x]=Y[X(x, x), x]; \tag{2}$$

$$X[Y(x, x), Y(x, x)]=Y[X(x, x), X(x, x)]. \tag{3}$$

Пусть $\langle Q; \Sigma\rangle$ — бинарная алгебра. Непустое подмножество $I\subseteq Q$ называется левым (правым) идеалом алгебры $\langle Q; \Sigma\rangle$, если для любых элементов $a\in I$, $b\in Q$ и для любой операции $X\in\Sigma$ имеет место $X(b, a)\in I$ $(X(a, b)\in I)$, и идеалом алгебры $\langle Q; \Sigma\rangle$, если оно одновременно является ее левым и правым идеалом (ср. ([1-3])).

Элемент $0\in Q$ называется нулем алгебры $\langle Q; \Sigma\rangle$, если $X(x, 0)= =X(0, x)=0$ для любого $x\in Q$ и для любой $X\in\Sigma$.

Для алгебры $G=\langle Q; \Sigma\rangle$ определим еще следующие подмножества множества Q:

$$Id^{\exists}(G)=\{x\in Q|\exists X\in\Sigma,\ X(x, x)=x\}$$

и

$$Id^{\forall}(G)=\{x\in Q|\forall X\in\Sigma,\ X(x, x)=x\}.$$

Лемма 1. *Если алгебра G дистрибутивна и удовлетворяет сверхтождествам* (1) и (2), *тогда*

i) *подмножество* $Id^{\exists}(G)$ *является идеалом алгебры* $G=\langle Q;\Sigma\rangle$

ii) $\forall X, Y\in\Sigma$ *и* $\forall a, b, c\in Q$ *справедливо* $Y[a, X(b, c)]\in Id^{\exists}(G)$ *и* $Y[X(a, b), c]\in Id^{\exists}(G)$.

Доказательство. Для любых $X, Y\in\Sigma$ и для любого $x\in Q$. справедливо $X[Y(x, x), x]\in Id^{\exists}(G)$, поскольку

$$Y[X[Y(x, x), x], \ X[Y(x, x), x]]=X[Y(x, x), \ Y(x, x)]=$$
$$=Y[X(x, x), x]=X[Y(x, x), x].$$

Аналогично устанавливается, что $X[x, Y(x, x)]\in Id^{\exists}(G)$ для любых $X, Y\in\Sigma$ и $x\in Q$. Итак, $Id^{\exists}(G)\neq\varnothing$. Возьмем произвольные элементы $x\in Id^{\exists}(G)$, $a\in Q$ и покажем, что $X(a, x)$, $X(x, a)\in Id^{\exists}(G)$ для любой операции $X\in\Sigma$. Поскольку $x\in Id^{\exists}(G)$, то существует операция $Y\in\Sigma$ такая, что $Y(x, x)=x$ и следовательно

$$Y[X(a, x), \ X(a, x)]=X[a, Y(x, x)]=X(a, x),$$

т. е. $X(a, x)\in Id^{\exists}(G)$. Точно так же показывается, что $X(x, a)\in Id^{\exists}(G)$. Таким образом $Id^{\exists}(G)$—идеал. По этой схеме доказывается, что при условии $Id^{\forall}(G)\neq\varnothing$ подмножество $Id^{\forall}(G)$—идеал алгебры $\langle Q;\Sigma\rangle$. Далее:

$$Y[a, X(b, c)]=X[Y(a, b), \ Y(a, c)]=Y\{X[Y(a, b), a], \ X[Y(a, b), c]\}=$$
$$=Y\{Y[X(a, a), \ X(b, a)], \ X[Y(a, b), c]\}=$$
$$=Y\{X[Y[X(a, a), b], \ Y[X(a, a), a]], \ X[Y(a, b), c]\}$$

и учитывая, что $Y[X(a, a), a]\in Id^{\exists}(G)$, получим требуемое включение: $Y[a, X(b, c)]\in Id^{\exists}(G)$. Аналогично доказывается, что $Y[X(a, b), c]\in\in Id^{\exists}(G)$ для любых $X, Y\in\Sigma$ и $a, b, c\in Q$.

Лемма 2. *Если алгебра* $G=\langle Q;\Sigma\rangle$ *удовлетворяет сверхтождествам* (1) *и* (2), *то следующие условия эквивалентны:*

iii) *алгебра* G *дистрибутивна и удовлетворяет сверхтождеству* $X[X(x, x), x]=Y[Y(y, y), y]$;

iv) *алгебра* G *дистрибутивна и* $Id^{\exists}(G)$*—одноэлементно;*

v) *алгебра* G*—система полугрупп с нулем* (т. е. каждая ее операция—полугруппа с одним и тем же нулем 0), *и*

$$X[a, Y(b, c)]=0,$$
$$X[Y(a, b), c]=0$$

для любых $X, Y\in\Sigma$ *и для любых* $a, b, c\in Q$.

Доказательство. iii)$\Rightarrow$iv). Если $a\in Id^{E}(G)$, то по определению существует операция $X\in\Sigma$ такая, что $X(a, a)=a$. Тогда $X(a, a)=$ $=X[X(a, a), a]=a$ и аналогично $b=Y[Y(b, b), b]$, если $b\in Id^{\exists}(G)$. Следовательно $a=b$ и $Id^{\exists}(G)$—одноэлементно.

iv)$\Rightarrow$v). Во-первых, каждая операция $X\in\Sigma$ является ассоциативной, т. е. $X[X(a, b), c]=X[a, X(b, c)]$, поскольку согласно предыдущему утверждению $X[X(a, b), c]$, $X[a, X(b, c)]\in Id^{\exists}(G)$ и $Id^{\exists}(G)$—одноэлементно. В качестве нуля выступает единственный элемент множества $Id^{\exists}(G)$. Действительно, если $0\in Id^{\exists}(G)$, то для любой операции $X\in\Sigma$ и для любого $a\in Q$

$$X(0, a),\ X(a, 0) \in Id^3(G),$$

следовательно $X(0, a) = X(a, 0) = 0$. Поскольку

$$X[Y(a, b), c],\ X[a, Y(b, c)] \in Id^3(G),$$

то

$$X[Y(a, b), c] = 0 = X[a, Y(b, c)].$$

v)$\to$*iii*). Справедливость сверхтождеств дистрибутивности очевидна (согласно условию v)). По той же причине выполняется сверхтождество $X[X(x, x), x] = Y[Y(y, y), y]$, так как его левая и правая части равны нулю.

Алгебра $\langle Q; \Sigma \rangle$ называется с левым (правым) $\forall$-сокращением, если справедлива следующая импликация:

$$(\forall X \in \Sigma,\ X(a, b) = X(a, c)) \to b = c$$

$$/(\forall X \in \Sigma,\ X(b, a) = X(c, a)) \Rightarrow b = c/,$$

где $a, b, c \in Q$. Алгебра называется $\forall$-сократимой, если она с левым и правым $\forall$-сокращением.

Теорема 1. *Если коммутативная и идемпотентная алгебра* $\langle Q; \Sigma \rangle$ *абелева и не обладает собственными* (т. е. отличными от Q) *идеалами, тогда она* $\forall$*-сократима.*

Теорема 2. *Каждая дистрибутивная алгебра* $\langle Q; \Sigma \rangle$ (где $|Q| \geqslant 3$) *без нетривиальных конгруэнций и удовлетворяющая сверхтождеству* (3), *является* $\forall$*-сократимой.*

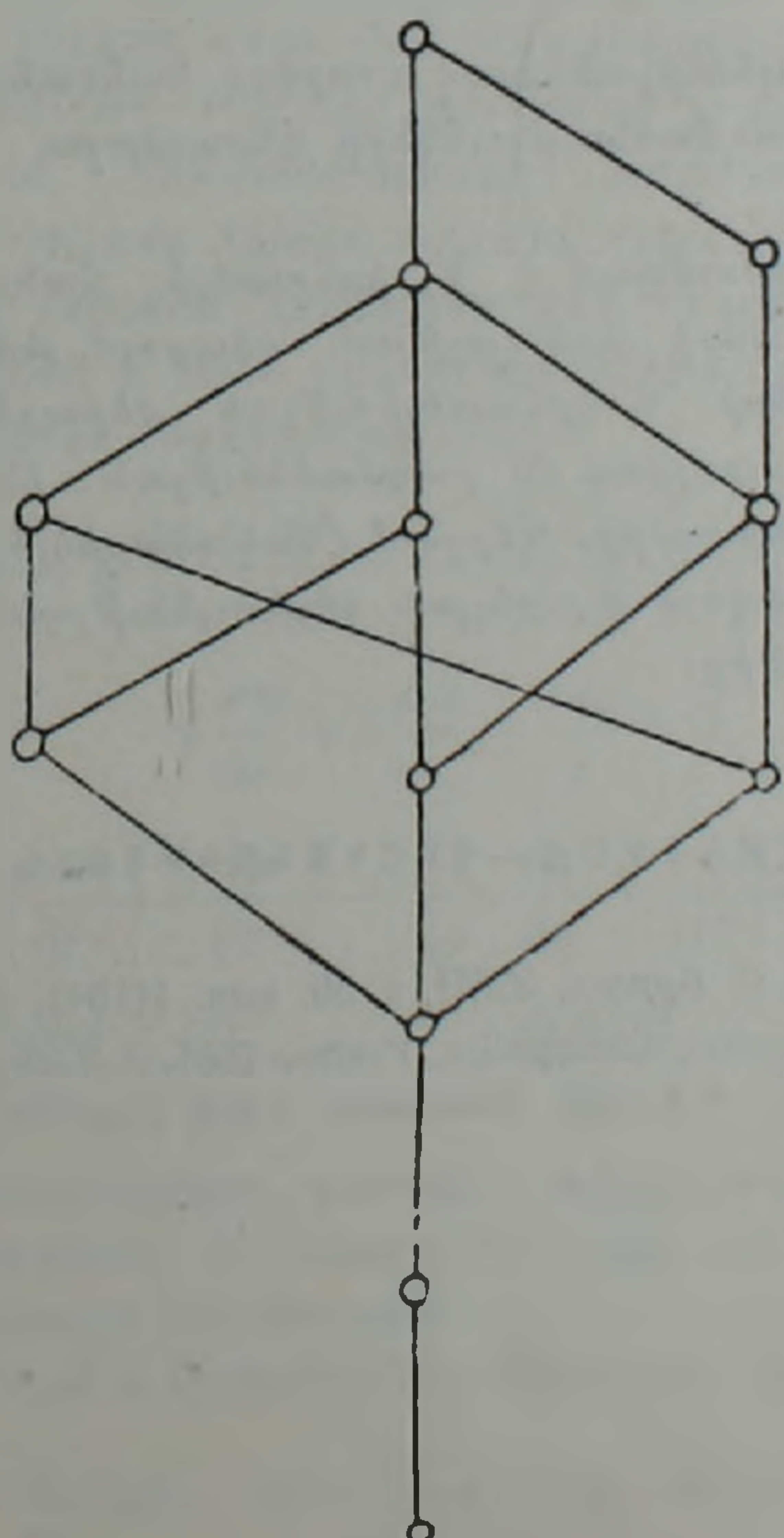

Рис. 1

Для формулировки следующего результата обозначим через M многообразие бинарных алгебр, определяемое по сверхтождествам (1), (2) и одному из (эквивалентных) условий *iii*)—v) леммы 2.

Определим бинарное отношение $\rho_{\exists} \subseteq Q \times Q$ по правилу:

$$a \rho_{\exists} b \Leftrightarrow \text{когда } a = b, \quad \text{или} \quad a, b \in Id^{\exists}(G).$$

В качестве примера заметим, что если $G = \langle Q; \Sigma \rangle$ дистрибутивна и удовлетворяет сверхтождествам (1), (2), тогда $\rho_{\exists}$—конгруэнция алгебры G и фактор-алгебра $G/\rho_{\exists} \in M$.

Теорема 3. *Многообразие M обладает всего 10 нетривиальными подмногообразиями, определенными сверхтождествами, и решетка ее таких подмногообразий изоморфна решетке вида рис. 1.*

Теорема 4. *Если в обратимой дистрибутивной алгебре $\langle Q; \Sigma \rangle$ выполняется котождество* ([4])

$$X[Y(a, b), Y(c, d)] = Y[X(a, c), X(b, d)],$$

тогда элементы $a, b, c, d \in Q$ порождают абелевую обратимую подалгебру. В частности, обратимая подалгебра, порожденная любыми тремя элементами, будет абелевой.

Ереванский государственный университет

Յու. Մ. ՄՈՎՍԻՍՅԱՆ

Որոշ գերնույնություններով որոշվող հանրահաշիվների բազմաձևությունների վերաբերյալ

Աշխատանքում ներմուծվում է ∀ կրճատելի հանրահաշվի գաղափարը և որոշ գերնույնությունների առկայության դեպքում ապացուցվում են թեորեմներ՝ հանրահաշիվների ∀ կրճատելիության վերաբերյալ։ Տրվում է նաև գերնույնություններով որոշվող մի բազմաձևության ենթաբազմաձևությունների կավարի լրիվ նկարագիրը։ Վերջում (հակադարձելի բաշխական հանրահաշիվներում) հետազոտվում է աբելյան գերնույնության բխելիության հարցը աբելյան կոնույնությունից։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Т. С. Баранович, М. С. Бургин*, УМН, т. 30, вып. 4(184), (1975). [2] *J. Jezek, T. Kepka, P. Nemec*, Distributive Groupoids, Praha, 1981. [3] *Tichy Robert F.*, Publ. Inst. math., 29. 229—239 (1981). [4] *Ю. М. Мовсисян*, ДАН АрмССР, т. 77, № 2 (1983).