

УДК 539.3

П. Г. Кешишян

**Изгиб равномерно нагруженной тонкой  
 прямоугольной плиты, свободно опертой по контуру  
 и жестко соединенной с колоннами  
 квадратного поперечного сечения**

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР О. М. Сапонджяном 23/V 1983)

Рассматривается задача изгиба прямоугольной плиты, опертой по контуру и жестко соединенной с четырьмя колоннами квадратного поперечного сечения.

В работе применено решение Навье для свободно опертой прямоугольной пластинки с представлением прогиба в виде двойного тригонометрического ряда.

Расположение осей координат показано на рис. 1. Введем обозначения:  $a$ ,  $b$  — размеры плиты в плане,  $e$ ,  $g$  — расстояние центров колонн от краев плиты,  $h$  — размер поперечного сечения колонны,  $p$  — интенсивность нагрузки, равномерно распределенной по всей поверхности плиты,  $w$  — прогиб плиты.

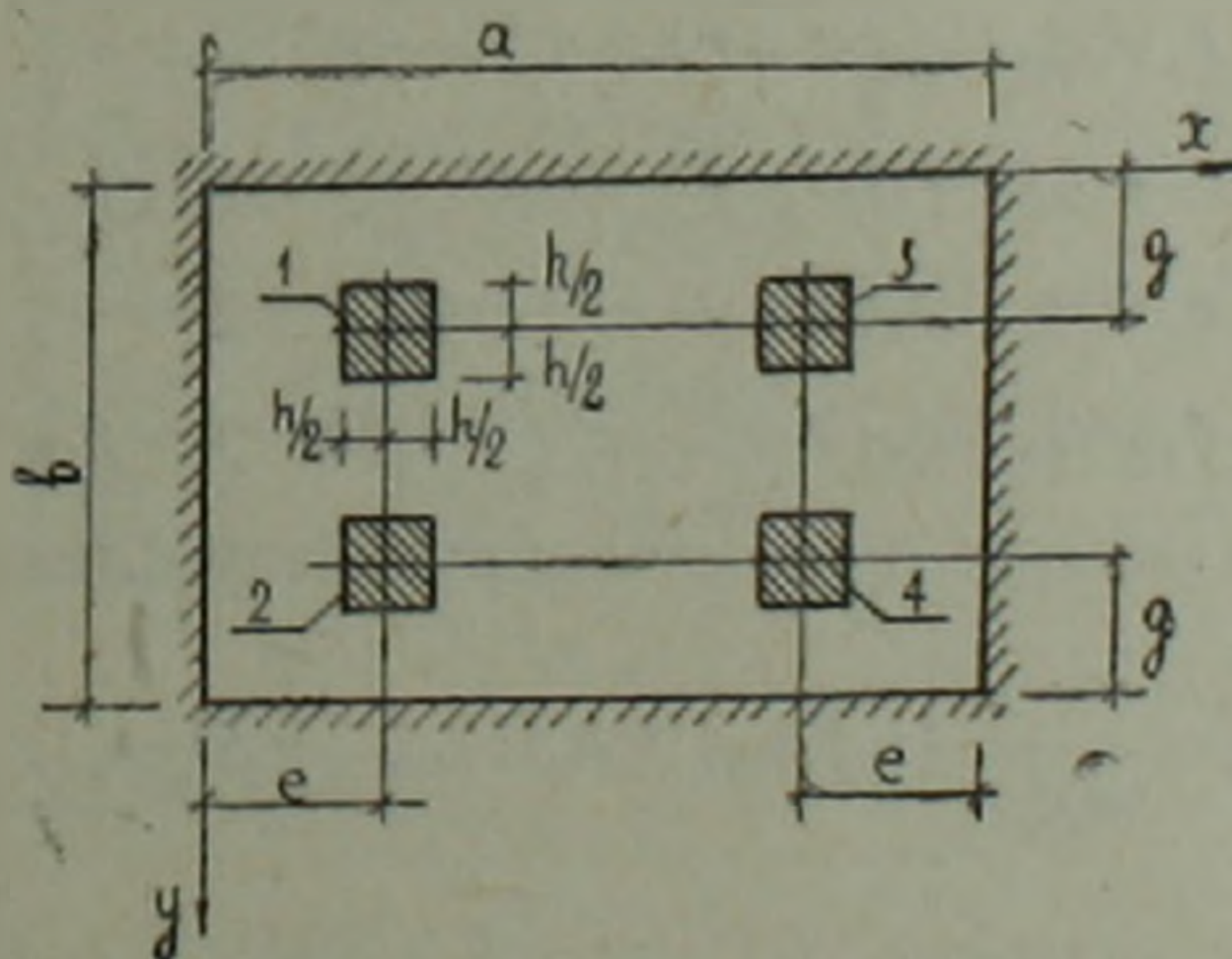


Рис. 1 Схема плиты

Представление прогиба в виде двойного тригонометрического ряда по синусам позволяет удовлетворить граничным условиям для свободно опертых краев:

$$w=0, \quad M_x=0 \quad \text{для} \quad x=0 \quad \text{и} \quad x=a;$$

$$w=0, \quad M_y=0 \quad \text{для} \quad y=0 \quad \text{и} \quad y=b.$$

Распределение давления между плитой и  $k$ -той колонной по площади их соприкасания примем по закону

$$q_k = q_0 + q_1 x_k + q_2 y_k, \quad (1)$$



где  $q_0, q_1, q_2$  — постоянные,  $x_k, y_k$  — оси координат, проходящие через центр тяжести поперечного сечения  $k$ -той колоны ( $k=1, 2, 3, 4$ ).

Представим выражения прогибов в виде

$$w = w_p - w_q, \quad (2)$$

где  $w_p$  — прогиб от равномерно распределенной нагрузки, равный <sup>(1)</sup>

$$w_p = \frac{16p}{\pi^6 D} \sum_{\substack{m=1,3,\dots \\ n=1,3,\dots}}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}}{mn \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2}, \quad (3)$$

а  $w_q$  — прогиб от реакций колонн, который определяется по формуле <sup>(1)</sup>

$$w_q = \frac{1}{\pi^4 D} \sum_{\substack{m=1 \\ n=1}}^{\infty} \frac{\sum_{k=1}^4 a_{kmn}}{\left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (4)$$

При этом

$$a_{kmn} = \frac{4}{ab} \iint q_k \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy, \quad (5)$$

а пределы интегрирования распространяются на область сечения колонн.

Относительно осей  $x, y$  для каждой колонны закон распределения давления (1) примет вид:

$$\begin{aligned} q_1 &= q_0 + q_1(x-e) + q_2(y-g), \\ q_2 &= q_0 + q_1(x-e) + q_2(b-y-g), \\ q_3 &= q_0 + q_1(a-x-e) + q_2(y-g), \\ q_4 &= q_0 + q_1(a-x-e) + q_2(b-y-g). \end{aligned} \quad (6)$$

Интегрируя по (5) с учетом (6) и суммируя результаты, получим

$$\sum_{k=1}^4 a_{kmn} = \frac{64p}{mn\pi^2} (n_0 \Omega_{0mn} + n_1 \Omega_{1mn} + n_2 \Omega_{2mn}), \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} \Omega_{0mn} &= \sin m\pi\alpha \sin m\pi\gamma \sin n\pi\beta \sin n\pi\lambda, \\ \Omega_{1mn} &= \left( \frac{1}{m\pi} \sin m\pi\gamma - \gamma \cos m\pi\gamma \right) \cos m\pi\alpha \sin n\pi\beta \sin n\pi\lambda, \\ \Omega_{2mn} &= \left( \frac{1}{n\pi} \sin n\pi\lambda - \lambda \cos n\pi\lambda \right) \sin m\pi\alpha \sin m\pi\gamma \cos n\pi\beta, \quad m=n=1, 3, 5 \dots \end{aligned}$$

$$\alpha = \frac{e}{a}, \quad \beta = \frac{g}{b}, \quad \gamma = \frac{h}{2a}, \quad \lambda = \frac{h}{2b}.$$

Неизвестные постоянные  $n_0, n_1$  и  $n_2$ , входящие в (7), выражены через  $q_0, q_1, q_2$  и  $p$  следующим образом:



$$n_0 = q_0 \frac{1}{p}, \quad n_1 = q_1 \frac{a}{p}, \quad n_2 = q_2 \frac{b}{p}.$$

Подставляя (7) в (4), а также учитывая (3), выражение прогиба по (2) после некоторых преобразований представим в виде

$$w = \frac{16pa^4}{\pi^6 D} \sum_{\substack{m=1,3,\dots \\ n=1,3,\dots}}^{\infty} \frac{C_{mn} \sin m\pi u \sin n\pi v}{mn(m^2 + k^2 n^2)^2}.$$

Здесь

$$C_{mn} = 1 - 4(n_0 \Omega_{0mn} + n_1 \Omega_{1mn} + n_2 \Omega_{2mn}),$$

$$u = \frac{x}{a}, \quad v = \frac{y}{b}, \quad k = \frac{a}{b}.$$

Неизвестные постоянные  $n_0$ ,  $n_1$ ,  $n_2$  определяются из условий контакта плиты с колонной. Эти условия относим к центральной точке поперечного сечения колонны, в которых фиксируются прогиб и углы наклона упругой поверхности плиты в направлении осей  $x$  и  $y$ , в соответствии с чем закон распределения давления между плитой и колонной принят линейным <sup>(2)</sup>. Пренебрегая для простоты деформациями колонны вследствие их большей жесткости по сравнению с плитой, условия для определения  $n_0$ ,  $n_1$  и  $n_2$  выразим равенствами  $w=0$ ,  $\frac{\partial w}{\partial x}=0$ ,  $\frac{\partial w}{\partial y}=0$  при  $x=e$  и  $y=g$ . Эти условия приводят к системе из трех уравнений, из которых определяются  $n_0$ ,  $n_1$  и  $n_2$ :

$$\begin{cases} \sum_{\substack{m=1,3,\dots \\ n=1,3,\dots}}^{\infty} \frac{C_{mn} \sin m\pi \alpha \sin n\pi \beta}{mn(m^2 + k^2 n^2)^2} = 0 \\ \sum_{\substack{m=1,3,\dots \\ n=1,3,\dots}}^{\infty} \frac{C_{mn} \cos m\pi \alpha \sin n\pi \beta}{n(m^2 + k^2 n^2)^2} = 0 \\ \sum_{\substack{m=1,3,\dots \\ n=1,3,\dots}}^{\infty} \frac{C_{mn} \sin m\pi \alpha \cos n\pi \beta}{m(m^2 + k^2 n^2)^2} = 0. \end{cases}$$

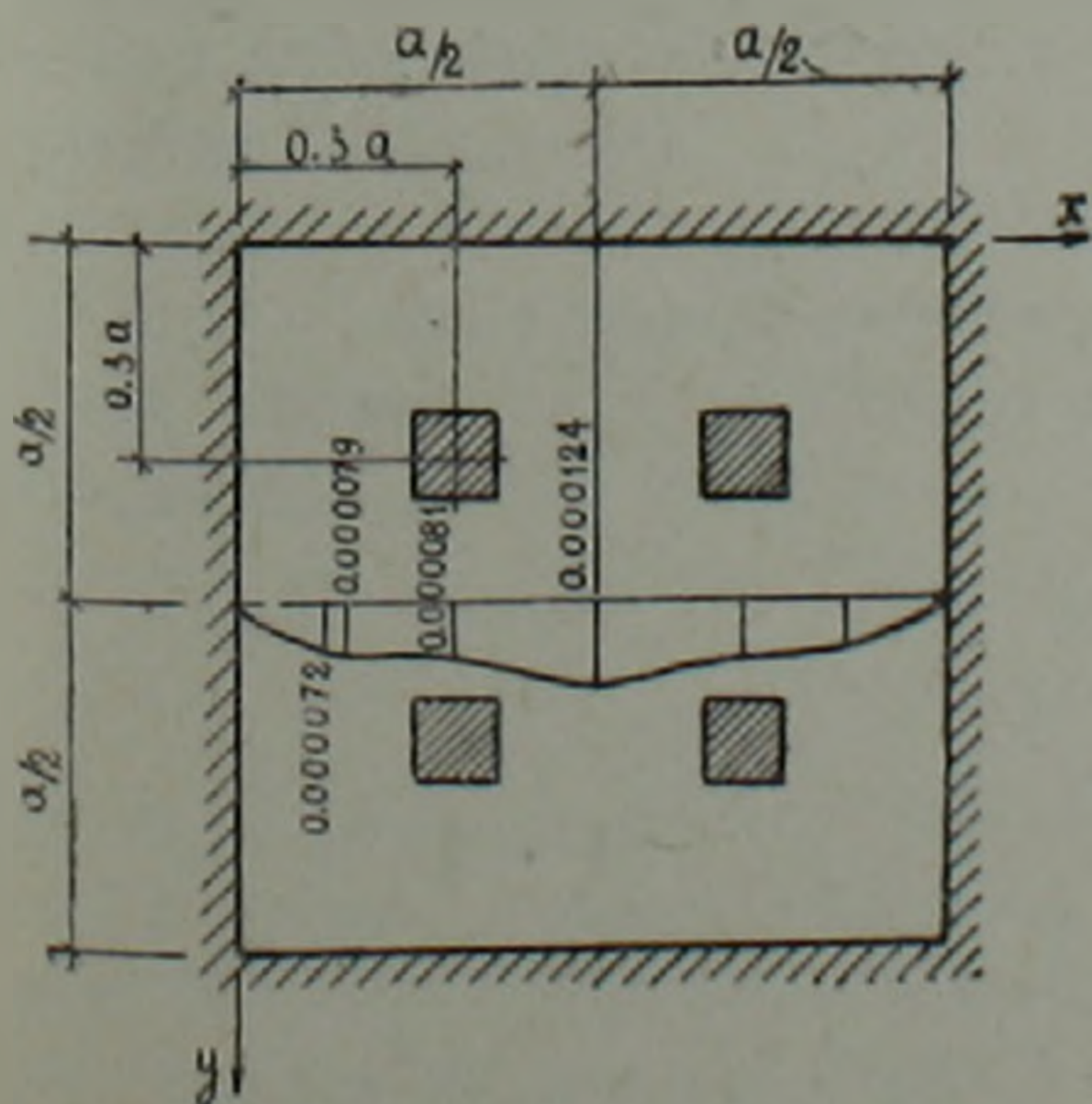


Рис. 2. Значения прогибов (в долях от  $pa^4/D$ )

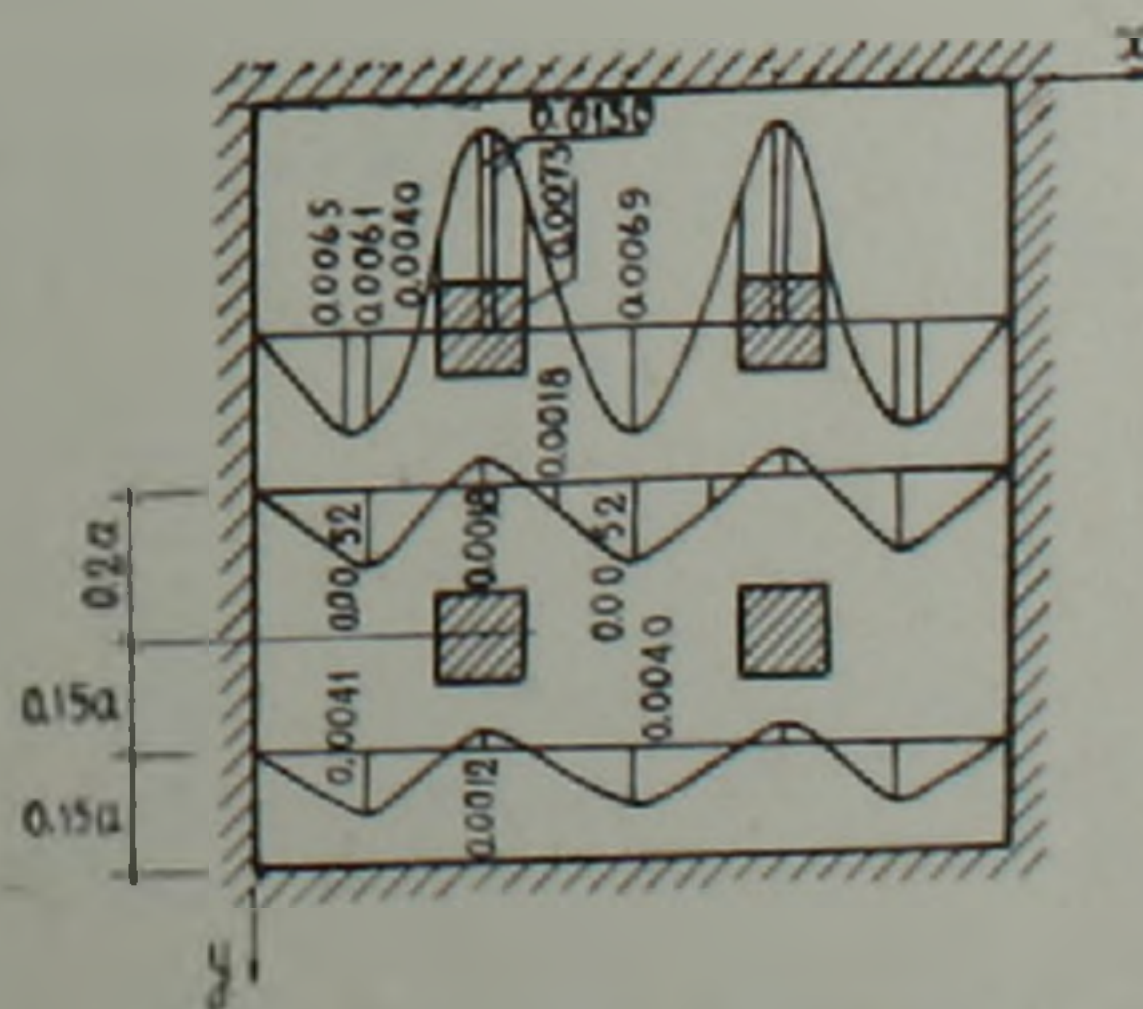


Рис. 3. Значения моментов  $M_x$  (в долях от  $pa^2$ )



После определения прогибов по известным формулам определяем изгибающие моменты.

Пример. Примем  $k=1$ ,  $\alpha=0,3$ ,  $\gamma=0,06$ , коэффициент Пуассона  $\nu=0,2$ . Результаты вычислений прогибов приводятся в виде эпюры (рис. 2). Значения изгибающих моментов определены для сечений, перпендикулярных к оси  $x$  (рис. 3).

В заключение благодарю члена-корреспондента АН Армянской ССР О. М. Сапонджяна за помощь в постановке и решении задачи.

Ереванский политехнический институт  
им. К. Маркса

#### Պ. Գ. ՔԵՇԻՇՅԱՆ

Քառակուսի լայնական հատույթով սյուներին կոշտ միացած և եզրագծով ազատ հենված բարակ ուղղանկյուն սալի ծոումը

Աշխատանքում որոշված են եզրագծով ազատ հենված և հավասարաչափ բեռնավորված բարակ ուղղանկյուն սալի ճկվածքներն ու ծոող մոմենտները, երբ սալը կոշտ միացված է շորս քառակուսի լայնական հատույթով սյուներին, որոնք համաչափ են դասավորված սալի կենտրոնի նկատմամբ:

Ծնթադրվում է, որ սալի և սյուներից յուրաքանչյուրի կոնտակտի պայմանը տեղի է ունենում դրանց հսկան մակերեսի կենտրոնում, որոնցում ֆիքսվում են սալի ճկվածքը և առաձգական մակերևույթի թեքության անկյունները  $x$ ,  $y$  առանցքի ուղղությամբ: Հստ որի էլ սալի և սյուների միջև առաջացած ճնշումների բաշխման օրենքը ընդունված է գծային:

#### ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

<sup>1</sup> С. П. Тимошенко, С. Войновский-Кригер, Пластинки и оболочки, Наука, М., 1966. <sup>2</sup> О. М. Сапонджян, П. Г. Кешишян, ДАН АрмССР, т. 71, № 1 (1980).