ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXVIII 1984 1

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

УДК 536.24

Р. С. Минасян

Смешанная граничная задача теплопроводности для вращающегося цилиндра

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 9/III 1983)

В работе приводится решение задачи распространения тепла в бесконечном однородном цилиндре, вращающемся с постоянной угловой скоростью, на поверхности которого происходит теплообмен с окружающей средой. Предполагаем, что коэффициент теплообмена и температура окружающей среды, произвольным образом изменяющиеся по окружности у поверхности цилиндра, не зависят от времени. Кроме того, предполагаем, что внутри цилиндра происходит тепловыделение с изменяющейся по радиусу интенсивностью. В этом случае тепловое поле цилиндра будет квазистационарным ([1]), и если обозначим через U температуру внутри цилиндра, то $U(r,\varphi)$ будет удовлетворять следующему дифференциальному уравнению в неподвижных координатах ([1,2]):

$$-\omega\frac{\partial U}{\partial\varphi}=a\left[\frac{\partial^2 U}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial\varphi^2}+\frac{1}{\lambda}w(r)\right] \tag{1}$$

и граничному условию

$$\left.\frac{\partial U}{\partial r}\right|_{r=R}=h(\varphi)[S(\varphi)-U(R,\varphi)]. \tag{5}$$

Здесь ω — угловая скорость вращения, a — коэффициент температуропроводности, $w(r)$ — интенсивность тепловыделения, λ — коэффициент теплопроводности, $h(\varphi)$ и $S(\varphi)$ — соответственно коэффициент теплообмена и температура окружающей среды у поверхности цилиндра. Относительно функций $h(\varphi)$ и $S(\varphi)$ предполагаем, что они имеют ограниченную вариацию, а $w(r)$ интегрируема. Исходя из физического смысла предполагаем, что $h(\varphi)\geqslant 0$.

Для нахождения решения предварительно разложим $U(r,\varphi)$ в ряд по функциям $e^{ik\varphi}$

$$U(r,\varphi)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}F_k(r)e^{ik\varphi}, \tag{3}$$

где

$$F_k(r)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}U(r,\varphi)e^{-ik\varphi}d\varphi. \tag{4}$$

Умножив уравнение (1) на $\frac{1}{2\pi}e^{-ik\varphi}d\varphi$ и проинтегрировав от 0 до 2π, получим

$$F''_k(r)+\frac{1}{r}F'_k(r)+\left(\frac{i\omega k}{a}-\frac{k^2}{r^2}\right)F_k(r)=0;\quad F''_0(r)+\frac{1}{r}F'_0(r)=-\frac{1}{\lambda}w(r). \tag{5}$$

Решая уравнения (5) и принимая во внимание условие ограниченности решения при $r=0$, имеем

$$F_k(r)=A_kJ_k(\sqrt{i}\gamma_k r);\quad F_0(r)=A_0-\frac{1}{\lambda}\left|\ln r\int_0^r r_1w(r_1)dr_1+\int_r^R r_1w(r_1)\ln r_1dr_1\right|. \tag{6}$$

Здесь J_k—функция Бесселя первого рода k-го порядка, $\gamma_k=\sqrt{\frac{\omega k}{a}}$.

Группируя затем в (3) взаимно сопряженные члены, будем иметь

$$U(r,\varphi)=\frac{g_0(r)}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}[f_k(r)\sin k\varphi+g_k(r)\cos k\varphi], \tag{7}$$

где

$$f_k(r)=c_ku_k(\gamma_kr)+d_kv_k(\gamma_kr);\quad g_k(r)=d_ku_k(\gamma_kr)-c_kv_k(\gamma_kr);\quad g_0(r)=2F_0(r). \tag{8}$$

Здесь $u_k(x)=\mathrm{ber}_kx$ и $v_k(x)=\mathrm{bei}_kx$—функции Томсона первого рода k-го порядка, представляющие действительную и мнимую части функции Бесселя от комплексного аргумента: $J_k(e^{\frac{3i\pi}{4}}x)=u_k(x)+iv_k(x)$.

Прежде чем перейти к определению постоянных c_k и d_k, входящих в выражения (8), представим граничное условие (2) в виде

$$\left.\frac{\partial U}{\partial r}\right|_{r=R}+h^*U(R,\varphi)=h(\varphi)S(\varphi)-|h(\varphi)-h^*|U(R,\varphi), \tag{9}$$

где $h^*=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}h(\varphi)d\varphi$. Умножая условие (9) последовательно на $\frac{1}{\pi}\sin k\varphi d\varphi$ и $\frac{1}{\pi}\cos k\varphi d\varphi$ и интегрируя от 0 до 2π, будем иметь

$$m_k=-\frac{k^{\frac{3}{2}}}{\pi G_k}\int_0^{2\pi}[h(\varphi)-h^*]\left|\frac{n_0}{2}+\sum_{j=1}^{\infty}j^{-\frac{3}{2}}(m_j\sin j\varphi+n_j\cos j\varphi)\right|(M_k\sin k\varphi-$$

$$-N_k\cos k\varphi)d\varphi+p_k;$$

$$n_k=-\frac{k^{\frac{3}{2}}}{\pi G_k}\int^{2\pi}|h(\varphi)-h^*|\left|\frac{n_0}{2}+\sum_{j=1}^{\infty}j^{-\frac{3}{2}}(m_j\sin j\varphi+n_j\cos j\varphi)\right|(M_k\cos k\varphi+$$

$$+N_k\sin k\varphi)d\varphi+q_k; \tag{10}$$

$$n_0=-\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left[\frac{h(\varphi)}{h^*}-1\right]\sum_{j=1}^{\infty}j^{-\frac{3}{2}}(m_j\sin j\varphi+n_j\cos j\varphi)d\varphi+q_0.$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$m_k=k^{\frac{3}{2}}[c_k u_k(\gamma_k R)+d_k v_k(\gamma_k R)];\quad n_k=k^{\frac{3}{2}}[d_k u_k(\gamma_k R)-c_k v_k(\gamma_k R)];$$

$$n_0=2A_0-\frac{2}{\lambda}\ln R\int\limits_0^R rw(r)dr;$$

$$M_k=\gamma_k[u_k(\gamma_k R)u_k'(\gamma_k R)+v_k(\gamma_k R)v_k'(\gamma_k R)]+h^*[u_k^2(\gamma_k R)+v_k^2(\gamma_k R)];$$

$$N_k=\gamma_k[u_k(\gamma_k R)v_k'(\gamma_k R)-v_k(\gamma_k R)u_k'(\gamma_k R)];\quad G_k=\gamma_k^2[u_k'^2(\gamma_k R)+v_k'^2(\gamma_k R)]+$$
$$+2\gamma_k h^*[u_k(\gamma_k R)u_k'(\gamma_k R)+v_k(\gamma_k R)v_k'(\gamma_k R)]+h^{*2}[u_k^2(\gamma_k R)+v_k^2(\gamma_k R)];\quad (11)$$

$$p_k=\frac{k^{\frac{3}{2}}}{\pi G_k}\int\limits_0^{2\pi}h(\varphi)S(\varphi)(M_k\sin k\varphi-N_k\cos k\varphi)d\varphi;$$

$$q_k=\frac{k^{\frac{3}{2}}}{\pi G_k}\int\limits_0^{2\pi}h(\varphi)S(\varphi)(M_k\cos k\varphi+N_k\sin k\varphi)d\varphi;$$

$$q_0=\frac{1}{\pi h^*}\int\limits_0^{2\pi}h(\varphi)S(\varphi)d\varphi+\frac{1}{\lambda Rh^*}\int\limits_0^{2\pi}rw(r)dr.$$

При этом согласно (11) c_k, d_k и A_0 выразятся через новые постоянные m_k и n_k:

$$c_k=k^{-\frac{3}{2}}\frac{m_k u_k(\gamma_k R)-n_k v_k(\gamma_k R)}{u_k^2(\gamma_k R)+v_k^2(\gamma_k R)};\quad d_k=k^{-\frac{3}{2}}\frac{m_k v_k(\gamma_k R)+n_k u_k(\gamma_k R)}{u_k^2(\gamma_k R)+v_k^2(\gamma_k R)};$$

$$A_0=\frac{n_0}{2}+\frac{1}{\lambda}\ln R\int\limits_0^R rw(r)dr.\qquad (12)$$

Таким образом, для определения m_k и n_k получили совокупность бесконечных систем линейных алгебраических уравнений (10). Для исследования этих систем оценим вначале сумму модулей коэффициентов при неизвестных m_j и n_j в каждом из уравнений (10). Обозначив через σ_k сумму модулей коэффициентов в k-ом уравнении первой из систем и принимая во внимание оценку коэффициентов Фурье функций с ограниченной вариацей ([3]), имеем

$$\sigma_k<k^{\frac{3}{2}}\frac{M_k+|N_k|}{\pi G_k}H\left[\frac{1}{k}+\frac{1}{k^{\frac{5}{2}}}+2\sum_{j=1}^{\infty}{}'\frac{k+j+|k-j|}{j^{\frac{3}{2}}|k^2-j^2|}\right].\qquad (13)$$

Здесь через H обозначена полная вариация функции $h(\varphi)$ в промежутке $[0, 2\pi]$, а штрих при знаке суммы означает, что при суммировании индекс $j=k$ опускается. Оценим далее отношения $\frac{M_k}{G_k}$ и $\frac{|N_k|}{G_k}$.

Для этого воспользуемся представлением суммы квадратов $u_\nu^2(x)+$ $+v_\nu^2(x)$ для произвольного индекса $\nu>0$ в виде ряда [4]

$$u_\nu^2(x)+v_\nu^2(x)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^{2\nu+4m}}{m!\Gamma(\nu+m+1)\Gamma(\nu+2m+1)}, \tag{14}$$

а также дифференциальными уравнениями, которым удовлетворяют функции $u_\nu(x)=\mathrm{ber}_\nu x$ и $v_\nu(x)=\mathrm{bei}_\nu x$ [5]:

$$\begin{aligned} u_\nu''(x)+\frac{1}{x}u_\nu'(x)-\frac{\nu^2}{x^2}u_\nu(x)&=-v_\nu(x);\\ v_\nu''(x)+\frac{1}{x}v_\nu'(x)-\frac{\nu^2}{x^2}v_\nu(x)&=u_\nu(x). \end{aligned} \tag{15}$$

Дважды дифференцируя по x соотношение (14) и принимая во внимание (15), имеем

$$u_\nu'^2(x)+v_\nu'^2(x)=\frac{1}{x^2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(\nu^2+8\nu m+8m^2)\left(\frac{1}{2}x\right)^{2\nu+4m}}{m!\Gamma(\nu+m+1)\Gamma(\nu+2m+1)}>\frac{\nu^2}{x^2}[u_\nu^2(x)+v_\nu^2(x)]. \tag{16}$$

Далее, из (14) имеем для $x>0$

$$u_\nu(x)u_\nu'(x)+v_\nu(x)v_\nu'(x)=\frac{1}{x}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(\nu+2m)\left(\frac{1}{2}x\right)^{2\nu+4m}}{m!\Gamma(\nu+m+1)\Gamma(\nu+2m+1)}>$$

$$>\frac{\nu}{x}[u_\nu^2(x)+v_\nu^2(x)]. \tag{17}$$

Из неравенств (16) и (17) получаем

$$\frac{M_k}{G_k}<\frac{R}{k};\quad \frac{|N_k|}{G_h}\leqslant\frac{\gamma_k}{G_k}\sqrt{[u_k^2(\gamma_kR)+v_k^2(\gamma_kR)][u_k'^2(\gamma_kR)+v_k'^2(\gamma_kR)]}<\frac{R}{k}. \tag{18}$$

Учитывая (18), после упрощений будем иметь

$$\sigma_k<8RH\left(\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{\ln k}{k}-\frac{1}{2k}\right). \tag{19}$$

Выражение в правой части неравенства (19) начиная от значения $k\geqslant\frac{1}{4}P^2\left[1+\sqrt{1+\frac{8}{P\pi}\ln P}\right]^2$, где $P=8RH$, становится меньше единицы, причем с возрастанием k убывает с быстротой $\frac{P}{\sqrt{k}}$. Аналогичную оценку получаем и для второй из систем (10). Таким образом, системы (10) квазирегулярны, причем суммы модулей коэффициентов стремятся к нулю. С другой стороны, принимая во внимание условие ограниченности вариации функции $h(\varphi)S(\varphi)$, из (11) и (18) получаем, что свободные члены p_k и q_k систем (10) будучи ограниченными в своей совокупности стремятся к нулю с быстротой $O(k^{-\frac{1}{2}})$. Из теории бесконечных систем [6] следуют существование и единственность ограниченного решения систем (10) и сходимость метода последовательных приближений.

Учитывая (12), (18) и (7), для функции $U(r, \varphi)$ окончательно получим

$$U(r, \varphi)=\frac{n_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^3[u_k^2(\gamma_k R)+v_k^2(\gamma_k R)]}\{[u_k(\gamma_k R)u_k(\gamma_k r)+$$

$$+v_k(\gamma_k R)v_k(\gamma_k r)](m_k\sin k\varphi+n_k\cos k\varphi)-[u_k(\gamma_k R)v_k(\gamma_k r)-$$

$$-v_k(\gamma_k R)u_k(\gamma_k r)](m_k\cos k\varphi-n_k\sin k\varphi)\}+$$

$$+\frac{1}{\lambda}\left[\ln\frac{R}{r}\int_0^r r_1 w(r_1)dr_1+\int_r^R r_1\ln\frac{R}{r_1}w(r_1)dr_1\right]. \tag{20}$$

Задаваясь значениями $S(\varphi)$, $h(\varphi)$, $w(r)$, а также λ, ω и решая усеченную систему (10), найдем оценки m_k и n_k сверху и снизу, после чего способом, описанным в ([7]), получим из (20) значения $U(r, \varphi)$ с избытком и недостатком.

Институт математики
Академии наук Армянской ССР

Ռ. Ս. ՄԻՆԱՍՅԱՆ

Ջերմահաղորդականության խառը եզրային խնդիր պտտվող գլանի համար

Հոդվածում դիտարկվում է հաստատուն անկյունային արագությամբ պտտվող անվերջ համասեռ գլանում ջերմահաղորդականության խնդիրը՝ գլանի արտաքին մակերևույթին շրջապատող միջավայրի հետ ջերմափոխանակության առկայության դեպքում, երբ ջերմափոխանակության գործակիցը և շրջապատող միջավայրի ջերմությունը, կամայական ձևով փոփոխվող գլանի մակերևույթի շրջանագծով, կախված չեն ժամանակից։ Ենթադրվում է նաև, որ գլանի ներսը գոյություն ունի ըստ շառավղի փոփոխվող ջերմաարտադրություն։

Խնդրի լուծումը տրվում է ըստ եռանկյունաչափական և Թոմսոնի ֆունկցիաների շարքի տեսքով, որի գործակիցներն որոշվում են գծային հանրահաշվական հավասարումների անվերջ սիստեմներից։ Ապացուցվում են այդ սիստեմների սահմանափակ լուծման գոյությունն ու միակությունը և նրանց հաջորդական մոտավորությունների մեթոդի զուգամիտությունը։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *П. Шнейдер*, Инженерные проблемы теплопроводности, ИЛ, М., 1960. [2] *D. Rosenthal*, Trans. ASME, v. 68 (1946). [3] *А. Зигмунд*, Тригонометрические ряды, т. 1, Мир, М., 1968. [4] *Г. Н. Ватсон*, Теория бесселевых функций, ч. 1, ИЛ, М., 1949. [5] *Р. С. Минасян*, Дифференциальные уравнения, т. 1, № 6 (1965) [6] *Л. В. Канторович, В. И. Крылов*, Приближенные методы высшего анализа, Физматгиз, М.—Л., 1962. [7] *Р. С. Минасян*, Изв. АН АрмССР. Сер. физ.-мат. наук, т. 11, № 3 (1958)