ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXVIII 1984 1

УДК 517.984.5

МАТЕМАТИКА

И. Г. Хачатрян

О некоторых формулах следов

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 28/I 1983)

В настоящей заметке получены формулы для следов ядра разности резольвент и ядра разности спектральных ортопроекторов двух самосопряженных дифференциальных операторов порядка $2n>2$ в $L^2(0, \infty)$ с коэффициентами, удовлетворяющими некоторым условиям убывания на бесконечности. Эти формулы в случае $n=1$ получены в работах [1-3].

Пусть l — самосопряженная дифференциальная операция порядка $2n>2$, заданная на полуоси $(0, \infty)$ по формуле

$$l[y]\equiv\frac{1}{i^{2n}}y^{(2n)}+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{i^{2k}}[p_{2k}y^{(k)}]^{(k)}+\sum_{k=0}^{n-2}\frac{1}{2i^{2k+1}}\{[p_{2k+1}y^{(k)}]^{(k+1)}+[p_{2k+1}y^{(k+1)}]^{(k)}\}, \tag{1}$$

где $p_k(x)$ — вещественные функции, удовлетворяющие условиям

$$\int_0^1 x^{2n-1-k}|p_k(x)|dx+\int_1^\infty|p_k(x)|dx<\infty, \quad k=0, 1, \ldots, 2n-2. \tag{2}$$

Точный смысл выражения (1) описывается при помощи квазипроизводных $y^{[k]}(x)$ $(k=0, 1, \ldots, 2n)$ функции $y(x)$, которые определяются по формулам $y^{[k]}=i^{-k}y^{(k)}$ $(k=0, 1, \ldots, n)$,

$$y^{[2n-k]}=\frac{1}{2}p_{2k-1}y^{[k-1]}+p_{2k}y^{[k]}+\frac{1}{2}p_{2k+1}y^{[k+1]}+\frac{1}{i}\frac{d}{dx}(y^{[2n-1-k]}),$$

$$k=1, 2, \ldots, n-1,$$

$$y^{[2n]}=p_0y^{[0]}+\frac{1}{2}p_1y^{[1]}+\frac{1}{i}\frac{d}{dx}(y^{[2n-1]}),$$

где $p_{2n-1}(x)\equiv 0$. Считается, что выражение (1) имеет смысл, если все квазипроизводные функции $y(x)$ до $(2n-1)$-го порядка включительно существуют и абсолютно непрерывны на каждом конечном отрезке $[a, b]\subset(0, \infty)$, при этом по определению $l[y]=y^{[2n]}$. Имеет место тождество Лагранжа

$$\int_a^b l[y(x)]\overline{w(x)}\,dx-\int_a^b y(x)\overline{l[w(x)]}\,dx=i[y,w]_a-i[y,w]_b, \tag{3}$$

где

$$[y,w]_x=\sum_{k=0}^{2n-1} y^{[2n-1-k]}(x)\overline{w^{[k]}(x)}.$$

Для функций y и w, зависящих еще от параметра λ, вместо $[y,w]_x$ будем использовать обозначение $[y,w]_{x,\lambda}$.

При условиях (2) уравнение

$$l[y]=\lambda^{2n}y \tag{4}$$

для всех $\lambda\neq 0$ имеет решения $y_k(x,\lambda)$ $(k=0,1,\ldots,2n-1)$, которые при $x\to\infty$ обладают асимптотикой ([4])

$$y_k(x,\lambda)=e^{i\omega_k\lambda x}[1+o(1)],\quad k=0,1,\ldots,2n-1, \tag{5}$$

где $\omega_k=\exp(i\pi k/n)$, при этом

$$y_k^{[\nu]}(x,\lambda)=(\omega_k\lambda)^\nu e^{i\omega_k\lambda x}[1+o(1)],\quad k,\nu=0,1,\ldots,2n-1. \tag{6}$$

Обозначим через D_0^* совокупность всех тех функций $y\in L^2(0,\infty)$, для которых $l[y]\in L^2(0,\infty)$, а через D_0—совокупность всех тех функций $y\in D_0^*$, которые удовлетворяют условиям $y^{[k]}(0)=0$ $(k=0,1,\ldots,2n-1)$. Определим на линейных многообразиях D_0^* и D_0 операторы L_0^* и $L_0(L_0\subset L_0^*)$, полагая $L_0^*y=l[y]$ при $y\in D_0^*$. Можно доказать, что L_0 есть замкнутый симметрический оператор, а L_0^*—сопряженный к L_0 оператор ([4,5]). Поскольку все решения уравнения (4) непрерывны в точке $x=0$ ([5]), то в силу (5) индекс дефекта оператора L_0 есть (n,n) и, следовательно, L_0 допускает самосопряженные расширения.

Пусть L—некоторое самосопряженное расширение оператора L_0. Тогда область определения D оператора L есть совокупность всех тех функций $y\in D_0^*$, которые удовлетворяют краевым условиям ([4])

$$[y,w_j]_0=0,\quad j=1,2,\ldots,n, \tag{7}$$

где $w_j(x)$ $(j=1,2,\ldots,n)$—некоторые линейно-независимые по модулю D_0 функции из D_0^*, удовлетворяющие соотношениям $[w_k,w_j]_0=0$ $(k,j=1,2,\ldots,n)$.

Обозначим через $\Delta_k(\lambda)$ $(0\leqslant k\leqslant n)$ минор n-го порядка прямоугольной матрицы $\|[y_k,w_j]_{0,\lambda}\|_{k=0,j=1}^{n,n}$, не содержащий ее строку с номером k. Миноры $\Delta_0(\lambda)$ $(-\pi/n\leqslant\arg\lambda\leqslant 0$ и $\Delta_n(\lambda)$ $(0\leqslant\arg\lambda\leqslant\pi/n)$ не зависят от выбора решений (5), голоморфны в указанных открытых секторах и непрерывны вплоть до границы $(\lambda\neq 0)$; кроме того, $|\Delta_0(\lambda)|=|\Delta_n(\lambda)|$ при $\lambda>0$ ([6]). Число λ^{2n} $(\lambda\neq 0,\ -\pi/n\leqslant\arg\lambda\leqslant\pi/n)$ является собственным значением оператора L тогда и только тогда, когда $\Delta_0(\lambda)=0$ при $-\pi/n\leqslant\arg\lambda\leqslant 0$ или $\Delta_n(\lambda)=0$ при $0\leqslant\arg\lambda\leqslant\pi/n$.

Обозначим через T множество всех тех значений $\lambda>0$, для которых числа λ^{2n} являются собственными значениями оператора L.

Введем функции

$$S_k(\lambda)=(-1)^{n+k}\frac{\Delta_k(\lambda)}{\Delta_n(\lambda)},\quad \lambda>0,\quad \lambda\notin T,\quad k=0,1,\ldots,n.$$

Имеем $|S_0(\lambda)|=S_n(\lambda)=1$. Очевидно, что решение

$$u(x,\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{k=0}^{n}S_k(\lambda)y_k(x,\lambda),\quad \lambda>0,\quad \lambda\notin T, \tag{8}$$

уравнения (4) удовлетворяет краевым условиям (7). При $x\to\infty$ справедлива формула

$$\sqrt{2\pi}\,u(x,\lambda)=e^{-i\lambda x}+S_0(\lambda)e^{i\lambda x}+o(1).$$

Функции $u(x,\lambda)$ и $S_0(\lambda)$ не зависят от выбора решений (5), непрерывны по λ и по непрерывности могут быть определены также для значений $\lambda\in T$.

Непрерывный спектр оператора L прост и совпадает с полуосью $[0,\infty)$, при этом решение (8) является нормированной обобщенной собственной функцией оператора L, соответствующей непрерывному спектру ([4,6,7]). Точечный спектр оператора L ограничен снизу и не имеет отличной от нуля конечной точки сгущения.

Обозначим через $R(x,t;\mu)$ и $E(x,t;\mu)$ ядро резольвенты и спектральное ядро ([4]) оператора L, соответственно, и пусть ядра $R^0(x,t;\mu)$ и $E^0(x,t;\mu)$ в этом же смысле относятся к оператору L^0, порожденному дифференциальной операцией $l^0[y]\equiv i^{2n}y^{(2n)}$ и краевыми условиями $y^{(k)}(0)=0$ $(k=0,1,\ldots,n-1)$. Для интервала $\delta=(\mu_1,\mu_2)$ введем также понятные обозначения $E(x,t;\delta)$, $E^0(x,t;\delta)$.

Теорема 1. *Пусть* $-\pi/n<\arg\lambda<-\pi/2n$ *или* $-\pi/2n<\arg\lambda<0$, *тогда*

$$\int_0^\infty [R(x,x;\lambda^{2n})-R^0(x,x;\lambda^{2n})]dx=-\frac{1}{2n\lambda^{2n-1}}\frac{\Delta_0^0(\lambda)}{\Delta_0(\lambda)}\left[\frac{\Delta_0(\lambda)}{\Delta_0^0(\lambda)}\right]', \tag{9}$$

где $\Delta_0^0(\lambda)=\det\|(\omega_k\lambda)^{j-1}\|_{k,j=1}^n$. *При условиях*

$$\int_0^1 x^{2n-1-k}|p_k(x)|dx+\int_1^\infty x|p_k(x)|dx<\infty,\quad k=0,1,\ldots,2n-2, \tag{10}$$

формула (9) *верна также для чисел* λ^{2n} *с* $\arg\lambda=-\pi/2n$, *не являющихся собственными значениями оператора* L.

Доказательство. Нетрудно убедиться в справедливости формулы

$$R(x,t;\lambda^{2n})=\sum_{k,j=1}^{n}\gamma_{jk}(\lambda)y_k(x,\lambda)\overline{u_j(t,\bar\lambda^{2n})},\quad x\geq t, \tag{11}$$

где $u_j(x,\mu)$ — решения уравнения $l[u]=\mu u$, удовлетворяющие условиям

$$[u_j,w_k]_{0,\mu}=0,\quad [u_j,v_k]_{0,\mu}=\begin{cases}1 & \text{при } j=k,\\ 0 & \text{при } j\neq k,\end{cases}\qquad k,j=1,2,\ldots,n; \tag{12}$$

функции $\gamma_{jk}(\lambda)$ определяются из соотношений

$$\sum_{k=1}^{n} \gamma_{jk}(\lambda)[y_k, w_s]_{0,\lambda} = i[v_j, w_s]_0, \quad j, s = 1, 2, \ldots, n, \tag{13}$$

а $v_k(x)$ $(k=1, 2, \ldots, n)$ — некоторые линейно-независимые по модулю D функции из D_0^*. При $x \to \infty$ справедливы формулы

$$\sum_{j=1}^{n} \gamma_{jk}(\lambda)\overline{u_j^{[\nu]}(x, \overline{\lambda}^{2n})} = \frac{i}{2n}(\lambda\omega_k)^{\nu+1-2n}e^{-i\omega_k\lambda x}[1+o(1)],$$

$$k=1, 2, \ldots, n; \quad \nu=0, 1, \ldots, 2n-1. \tag{14}$$

В силу (12) при любом μ и $y(x) \in D_0^*$ имеют место равенства

$$[y, w_k]_0 = \sum_{j=1}^{n} [v_j, w_k]_0 [y, u_j]_{0,\mu}, \quad k=1, 2, \ldots, n. \tag{15}$$

При условиях (2) для любых $\varepsilon > 0$ и $\vartheta \neq \pi s/2n$ $(s=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ решения (5) можно подобрать так, что квазипроизводные $y_k^{[\nu]}(x, \lambda)$, как функции от λ на луче $\arg\lambda = \vartheta$, $|\lambda| > \varepsilon$, имеют непрерывные производные по λ и, кроме того, при $x \to \infty$ справедливы формулы

$$\frac{\partial}{\partial\lambda} y_k^{[\nu]}(x, \lambda) = \left(i\omega_k x + \frac{\nu}{\lambda}\right) y_k^{[\nu]}(x, \lambda) + o(1)e^{i\omega_k\lambda x}, \tag{16}$$

$$k, \nu = 0, 1, \ldots, 2n-1.$$

При условиях (10) такой выбор решений (5) возможен при любом ϑ.

Теперь в тождестве (3), написанном для функций $w = u(x, \overline{\lambda}^{2n})$ и $y = (\lambda_1 - \lambda)^{-1} y_k(x, \lambda_1)$ $(\arg\lambda_1 = \arg\lambda)$, совершим последовательный предельный переход $a \to 0$, $\lambda_1 \to \lambda$, $b \to \infty$. Тогда, учитывая соотношения (6) и (11)—(16), получим формулу

$$2n\lambda^{2n-1}\int_0^b R(x, x; \lambda^{2n})dx = -\mathrm{sp}[A'(\lambda)A^{-1}(\lambda)] +$$

$$+ \frac{2i\omega_1 b}{1-\omega_1} + \frac{n(2n-1)}{2\lambda} + o(1), \quad b \to \infty, \tag{17}$$

где $A(\lambda) = \|[y_k, w_j]_{0,\lambda}\|_{k,j=1}^n$. Учитывая также равенство

$$\mathrm{sp}[A'(\lambda)A^{-1}(\lambda)] = \Delta_0'(\lambda)[\Delta_0(\lambda)]^{-1},$$

из (17) получим формулу (9).

Теорема 2. *Пусть выполняются условия* (10). *Тогда при любых* $(\lambda_2 > \lambda_1 > 0)$ *справедлива формула*

$$\int_0^\infty [E(x, x; \delta) - E^0(x, x; \delta)]dx = m(\delta) + \frac{1}{2\pi i}\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{S_0'(\lambda)}{S_0(\lambda)} d\lambda, \tag{18}$$

где $m(\delta)$ — *число собственных значений оператора* L *в интервале* $\delta = (\lambda_1^{2n}, \lambda_2^{2n})$ *с учетом их кратностей.*

Доказательство. Имеет место равенство

$$\frac{\partial}{\partial\lambda} E(x, t; \lambda^{2n}) = u(x, \lambda)\overline{u(t, \lambda)}, \quad \lambda > 0, \quad \lambda \notin T,$$

где функция $u(x, \lambda)$ определяется по формуле (8) и, следовательно,

$$u(x, \lambda) = -\frac{2ni}{\sqrt{2\pi}} \lambda^{2n-1} \sum_{j=1}^{n} \overline{\gamma_{jn}(\lambda)}\, u_j(x, \lambda^{2n}), \quad \lambda > 0.$$

Далее равенство (18) выводится при помощи тождества (3) так же, как формула (9).

Институт математики
Академии наук Армянской ССР

Ի. Գ. ԽԱՉԱՏՐՅԱՆ

Հետքերի որոշ բանաձևերի մասին

Դիտարկվում են $L^2(0, \infty)$ տարածությունում L և L_0 ինքնահամալուծ դիֆերենցիալ օպերատորները, որոնց գործակիցները բավարարում են անվերջությունում նվազելու որոշ պայմանների։ L և L^0 օպերատորների ռեզոլվենտները նշանակենք համապատասխանաբար R_μ և R_μ^0, իսկ սպեկտրալ օրթոպրոյեկտորները՝ E_μ և E_μ^0. Դուրս են բերվում բանաձևեր $R_\mu - R_\mu^0$ և $E_\mu - E_\mu^0$ ինտեգրալ օպերատորների կորիզների հետքերի համար։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Л. Д. Фаддеев*, ДАН СССР, т. 115, № 5 (1957). [2] *В. С. Буслаев, Л. Д. Фаддеев*, ДАН СССР, т. 132, № 1 (1960). [3] *В. А. Яврян*, ДАН АрмССР, т. 38, № 4 (1964). [4] *М. А. Наймарк*, Линейные дифференциальные операторы, Наука, М., 1969. [5] *И. Г. Хачатрян*, Изв. АН АрмССР, Математика, т. 17, № 3 (1982). [6] *И. Г. Хачатрян*, Функц. анализ и его прилож., т. 17, № 1 (1983). [7] *И. М. Рапопорт*, О некоторых асимптотических методах в теории дифференциальных уравнений, Изд-во АН УССР, Киев, 1954.