

УДК 519.1

МАТЕМАТИКА

Ж. Г. Никогосян

Одно достаточное условие гамильтоновости графа

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. Р. Варшамовым 15/1 1983)

Рассматриваются конечные неориентированные графы без петель и кратных ребер. Все понятия и обозначения, не определяемые здесь, можно найти в книге ⁽¹⁾. Пусть G — граф с множеством вершин $V(G)$ и множеством ребер $X(G)$. Через $v(G)$, $\delta(G)$, $k(G)$ и $\alpha(G)$ обозначим соответственно число вершин, минимальную степень, вершинную связность и вершинное число независимости графа G . Граф называется гамильтоновым, если содержит простой цикл C длины $v(G)$ (при этом C называется гамильтоновым циклом графа G).

В 1952 г. Дирак ⁽²⁾ доказал, что если $\delta(G) \geq v(G)/2$, то G имеет гамильтонов цикл. При $\delta(G) \geq v(G)/2 - 1$ граф G не всегда содержит гамильтонов цикл.

В работе ⁽³⁾ (см. также ⁽⁴⁾) доказано (1981 г.), что при дополнительном условии $k(G) \geq 2$ для гамильтоновости графа достаточно требовать $\delta(G) \geq (v(G) + k(G))/3$.

Заметим, что из условий $k(G) \geq 2$ и $\delta(G) \geq (v(G) + k(G))/3$ в частности следует (см. ⁽³⁾) $\delta(G) \geq \alpha(G)$. Однако оба неравенства $k(G) \geq 2$ и $\delta(G) \geq \alpha(G)$ могут нарушаться при $\delta(G) \geq (v(G) + k(G))/3$.

В 1971 г. Нэш-Вильямс доказал (⁽⁵⁾ лемма 4), что если $k(G) \geq 2$ и $\delta(G) \geq \max((v(G) + 2)/3, \alpha(G))$, то G — гамильтонов. В случае $k(G) \geq 2$ и $\delta(G) \geq \max((v(G) + 1)/3, \alpha(G))$ граф G не всегда содержит гамильтонов цикл.

В настоящем сообщении предлагается

Теорема. Если $k(G) \geq 3$ и

$$\delta(G) \geq \max\left(\frac{v(G) + 2k(G)}{4}, \alpha(G)\right), \quad (1)$$

то G — гамильтонов.

Введем некоторые вспомогательные понятия. Пусть P — маршрут графа G . Подграф, имеющий множество вершин $V(P)$ и множество ребер $X(P)$, обозначим $\|P\|$. Длина простой цепи есть число ее ребер. Для любого подграфа $H \subseteq G$ и для любых вершин $x, y \in V(H)$ расстоянием $d_H(x, y)$ между вершинами x и y называется длина кратчайшей простой цепи подграфа H , соединяющей x и y . Первый и последний элемент любой конечной последовательности Q обозначим $F(Q)$ и $L(Q)$ соответственно.

Пусть H — маршрут графа G , r — положительное целое число и пусть $Z_i \subseteq V(H)$, $i = 1, 2, \dots, r$ ($r \geq 2$).

Определение. $(Z_1, Z_2, \dots, Z_t)$ назовем (H, r) -схемой, если $Z_1, Z_2, \dots, Z_t$ являются независимыми множествами в подграфе $\|H\|$, а неравенство $d_H(\xi, \eta) \geq r$ имеет место для любых i, j ($i \neq j$) и для любых $\xi \in Z_i, \eta \in Z_j$ ($\xi \neq \eta$). Если множества $Z_1, Z_2, \dots, Z_t$ имеют систему различных представителей, то (H, r) -схема называется нетривиальной.

Доказательство теоремы основано на следующих вспомогательных утверждениях:

Лемма 1. Если P является n -вершинной ($n \geq 2$) простой цепью, $r \geq 2$ — целое число, (Z_1, Z_2) — нетривиальная (P, r) -схема, то $|Z_1| + |Z_2| \leq \max\{(n-r+5)/2, 2(n+r-1)/r\}$.

Лемма 2. Если P является n -вершинной ($n \geq 3$) простой цепью, $r \geq 2$ — целое число, (Z_1, Z_2, Z_3) — нетривиальная (P, r) -схема и $|Z_i| \geq 3$, $i = 1, 2, 3$, то $|Z_1| + |Z_2| + |Z_3| \leq \max\{(n-2r+12)/2, 3(n+r-1)/r\}$.

Лемма 3. Пусть $P = \xi_1 \xi_2 \dots \xi_n$ ($n \geq 3$) — произвольная простая цепь графа G . Если $|N(\xi_1) \cap V(P)| + |N(\xi_n) \cap V(P)| \geq n+1$, то $\xi_1 \xi_{i+1} \in X(G)$, $\xi_n \xi_{i-1} \in X(G)$ для некоторого i ($2 \leq i \leq n-1$).

Лемма 4. Пусть $P = \xi_1 \xi_2 \dots \xi_n$ ($n \geq 3$) — произвольная простая цепь графа G , ε ($0 \leq \varepsilon \leq n-2$) — произвольное целое число. Если $|N(\xi_1) \cap V(P)| + |N(\xi_n) \cap V(P)| \geq n + \varepsilon$, то существуют попарно различные целые числа $i_1, i_2, \dots, i_{\varepsilon+1}$ такие, что $\xi_1 \xi_{i_1+1} \in X(G)$, $\xi_n \xi_{i_\varepsilon} \in X(G)$ для всех значений $i_1, i_2, \dots, i_{\varepsilon+1}$.

Приводим лишь набросок доказательства теоремы. Пусть $v(G) = v$, $\delta(G) = \delta$, $k(G) = k$ и $\alpha(G) = \alpha$. Так как связность графа G равна k , то существует k -вершинное подмножество $S \subseteq V(G)$ такое, что $\langle V(G) \setminus S \rangle$ — несвязный граф. Пусть $S = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ и пусть $G_1, G_2, \dots, G_t$ — компоненты связности графа $\langle V(G) \setminus S \rangle$. Введем обозначения

$$H^+ = \bigcup_{i=1}^t G_i, \quad H^- = \bigcup_{i=f+1}^t G_i, \quad f \in \overline{1, t-1}.$$

Пусть $\Omega(n)$ обозначает множество всевозможных n -ок $(P_1, P_2, \dots, P_n)$, где $P_1, P_2, \dots, P_n$ — простые цепи графа G , попарно не имеющие общих вершин. Пусть

$$\Omega^*(n) = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \Omega(n) /$$

$$|F(x_i) \cap S| \leq \delta, |L(x_i) \cap S| \leq \delta, V(x_i) \subseteq V(H^*) \cup S, i = \overline{1, n}, * \in \{+, -\},$$

$$\Omega_\infty^+ = \bigcup_{n=1}^{\lfloor k/2 \rfloor} \Omega^+(n), \quad \Omega_\infty^- = \bigcup_{n=1}^{\lfloor k/2 \rfloor} \Omega^-(n).$$

Через $\Omega^+ -$ обозначим множество всевозможных пар $(\hat{x}, \hat{y})$ таких, что $\hat{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \Omega_\infty^+$, $\hat{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \Omega_\infty^-$, а множество вершин $\bigcup_{i=1}^n (V(x_i) \cup V(y_i))$ и множество ребер $\bigcup_{i=1}^n (X(x_i) \cup X(y_i))$ определяют простой цикл графа G .

Случай 1. $|V(H^+)| \leq 2\delta - k - 1$, $|V(H^-)| \leq 2\delta - k - 1$.

Пусть $|V(H^+)| = 2\delta - k - 1 - \beta$ для некоторого $\beta \geq 0$. Введем число

Δ следующим образом: $\Delta = k-3$ при $\beta \leq k-3$ и $\Delta = 2$ при $\beta \geq k-2$.
Введем обозначения

$$A_1^+ = \{p \in \Omega^+(1) / F(p) = v_1, \quad L(p) = v_2\},$$

$$A_2^+ = \{p \in A_1^+ / |V(p) \cap S| \leq \Delta\},$$

$$A_3^+ = \{p \in A_2^+ / \forall p' \in A_2^+ (|V(p') \cap S| \leq |V(p) \cap S|)\},$$

$$A_4^+ = \{p \in A_3^+ / \forall p' \in A_3^+ (|\{i / V(G_i) \cap V(p') \neq \emptyset\}| \leq |\{i / V(G_i) \cap V(p) \neq \emptyset\}|)\},$$

$$A_5^+ = \{p \in A_4^+ / \forall p' \in A_4^+ (|V(p')| \leq |V(p)|)\}.$$

В силу k -связности графа G $N(v_i) \cap V(G_j) \neq \emptyset$, $i = \overline{1, k}$, $j = \overline{1, l}$, откуда ввиду связности подграфов G_i для любых вершин $v_x, v_y \in S$ и для любого компонента G_z существует некоторая цепь $P[x, y, z]$, удовлетворяющая условию

$$F(P[x, y, z]) = v_x, \quad L(P[x, y, z]) = v_y, \quad V(P[x, y, z]) \subseteq V(G_z) \cup \{v_x, v_y\}$$

В частности $P[1, 1, 1] \in A_1^+$. Следовательно, $A_5^+ \neq \emptyset$. Выберем произвольную цепь P_0^+ из A_5^+ . Обозначим

$$A_1^- = \{p \in \Omega^-(1) / F(p) = v_1, \quad L(p) = v_2\},$$

$$A_2^- = \{p \in A_1^- / V(p) \cap V(P_0^+) = \{v_1, v_2\}\},$$

$$A_3^- = \{p \in A_2^- / \forall p' \in A_2^- (|V(p') \cap S| \leq |V(p) \cap S|)\},$$

$$A_4^- = \{p \in A_3^- / \forall p' \in A_3^- (|\{i / V(G_i) \cap V(p') \neq \emptyset\}| \leq |\{i / V(G_i) \cap V(p) \neq \emptyset\}|)\},$$

$$A_5^- = \{p \in A_4^- / \forall p' \in A_4^- (|V(p')| \leq |V(p)|)\}.$$

Из $P[1, 1, l] \in A_1^-$ следует $A_5^- \neq \emptyset$. Выберем произвольную цепь P^- из A_5^- . Обозначим

$$B_1^+ = \{p \in A_1^+ / V(p) \cap V(P^-) = \{v_1, v_2\}\},$$

$$B_2^+ = \{p \in B_1^+ / \forall p' \in B_1^+ (|V(p') \cap S| \leq |V(p) \cap S|)\},$$

$$B_3^+ = \{p \in B_2^+ / \forall p' \in B_2^+ (|\{i / V(G_i) \cap V(p') \neq \emptyset\}| \leq |\{i / V(G_i) \cap V(p) \neq \emptyset\}|)\},$$

$$B_4^+ = \{p \in B_3^+ / \forall p' \in B_3^+ (|V(p')| \leq |V(p)|)\}.$$

Из $A_5^+ \neq \emptyset$ следует $B_4^+ \neq \emptyset$. Выберем произвольную цепь P^+ из B_4^+ . Подграф $\|P^+\| \cup \|P^-\|$ определяет гамильтонов цикл графа G .

Случай 2. Либо $|V(H^+)| \geq 2\beta - k$, либо $|V(H^-)| \geq 2\beta - k$.

Без потери общности можем предполагать, что $|V(H^+)| \geq 2\beta - k$. Обозначим

$$\Omega^+ = \{(x_1, x_2, \dots, x_m) \in \Omega_\infty^+ / \forall (y_1, y_2, \dots, y_n) \in$$

$$\in \Omega_\infty^+ \left(\sum_{i=1}^n |V(y_i)| \leq \sum_{i=1}^m |V(x_i)| \right)\}.$$

Так как $P[1, 1, 1] \in \Omega_\infty^+$, то $\Omega^+ \neq \emptyset$. Выберем произвольный $(L_1^+, L_2^+, \dots, L_m^+) \in \Omega^+$. Без потери общности можем предполагать, что $F(L_i^+) = v_{2i-1}$, $L(L_i^+) = v_{2i}$, $i = \overline{1, m}$. Обозначим

$$\Omega^- = \{x \in \Omega_\infty^- / \exists y \in \Omega^+ ((x, y) \in \Omega^{+-})\}.$$

Так как $\delta \geq 1$, то достаточно рассматривать случай $\delta \leq (v+1)/3$ (при $\delta \geq (v+2)/3$ граф G гамильтонов ⁽⁵⁾), откуда $v \geq 3\delta - 1$. Учитывая также $v \leq 4\delta - 2k$ (см. (1)), получим $\delta - k + 1 \geq k$, откуда $|V(H^-)| \geq |V(G_1)| \geq \delta - k + 1 \geq k$. Тогда по теореме Холла ⁽⁶⁾ и ввиду k -связности графа G существует множество вершин $\{v_1, v_2, \dots, v_{2m}\}$ такое, что $v_i v_l \in X(G)$, $l = \overline{1, 2m}$. Введем два множества фиктивных ребер

$$R^- = \left(\bigcup_{i=1}^{m-1} \{v_{2i} v_{2i+1}\} \right) \cup \{v_{2m} v_1\}, \quad R^0 = \bigcup_{i=1}^m \{v_{2i-1} v_{2i}\}.$$

Рассмотрим граф G' с множеством вершин $V(G)$ и множеством ребер $R^- \cup R^0 \cup X(G)$. Через W обозначим множество простых циклов C графа G' , удовлетворяющих условию

$$V(C) \subseteq V(H^-) \cup S, \quad V(C) \cap V(L^+) = \{v_1, v_2, \dots, v_{2m}\}, \quad R^0 \subseteq X(C).$$

Множество вершин $\{v_1, v_2, \dots, v_{2m}\} \cup \{v_1', v_2', \dots, v_{2m}'\}$ и множество ребер $R^- \cup R^0 \cup \left(\bigcup_{i=1}^{2m} \{v_i v_i'\} \right)$ определяют простой цикл графа G' , принадлежащий W , т. е. $W \neq \emptyset$. Обозначим

$$W^1 = \{x \in W / \forall y \in W (|X(x) \cap R^-| \leq |X(y) \cap R^-|),$$

$$W^2 = \{x \in W^1 / \forall y \in W^1 (|V(y)| \leq |V(x)|)\}.$$

Из $W \neq \emptyset$ следует $W^2 \neq \emptyset$. Выберем произвольный $C^- \in W^2$. Показано, что $X(C^-) \cap R^- = \emptyset$. Множество вершин $V(C^-)$ и множество ребер $X(C^-) \setminus R^0$ определяют в графе G некоторое семейство цепей $(L_1^-, L_2^-, \dots, L_m^-) \in \Omega_-^-$ такое, что $(L_1^+, L_2^+, \dots, L_m^+) \in \Omega_+^-$. Без потери общности можем предполагать, что для любых $\hat{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\hat{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, удовлетворяющих $\hat{x} \in \Omega_+^+$, $(\hat{x}, \hat{y}) \in \Omega_+^{+-}$, имеет место

$$\left| \bigcup_{i=1}^m (V(L_i^+) \cup V(L_i^-)) \right| \geq \left| \bigcup_{i=1}^n (V(x_i) \cup V(y_i)) \right|.$$

Подграф $\bigcup_{i=1}^m (\|L_i^+\| \cup \|L_i^-\|)$ определяет гамильтонов цикл графа G .

Для установления этого утверждения используется также тот факт ⁽⁴⁾, что любой 3-связный граф G либо гамильтонов, либо содержит простой цикл длины $\geq 3\delta - k$.

Вычислительный центр
Академии наук Армянской ССР и
Ереванского государственного университета

ժ. Գ. ՆԻՆՈՂՈՍԱՆ

Գրաֆի համիլտոնյանություն մի բավարար պայման

Դիցուք v -ն G գրաֆի գագաթների քանակն է, δ -ն՝ գագաթների նվազագույն աստիճանը, k -ն՝ գագաթային կապակցվածությունը և α -ն՝ գագաթային անկախության թիվը:

Թեև $k \geq 3$ և

$$\delta \geq \max \left(\frac{v+2k}{4}, \alpha \right),$$

այսինքն G -ն համիլտոնյան գրաֆ է:

Երկրորդ թեորեմը $3 \leq k < (v+8)/6$ դեպքում ավելի ուժեղ է. քան ներքին հատկությունների թեորեմը, որը պահանջում է, որ եթե $k \geq 2$ և $\delta \geq \max((v+2)/3, \alpha)$, ապա G -ն համիլտոնյան է:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ Փ. Харари, Теория графов, Мир, М., 1973. ² A. G. Dirlac, Math. Soc., Ser. 3, 2 (1952). ³ R. Häggkvist, G. G. Nicoghossian, J. Comb. Theory, 30 (1981). ⁴ Ж. Г. Никогосян, ДАН АрмССР, т. LXXII, № 2 (1981). ⁵ C. St. J. A. Nash-Williams, Studies in Pure Mathematics (L. Mirsky, ed.), Academic Press, London, 1971. ⁶ М. Холл, Комбинаторика, Мир, М., 1970.