ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
LXXVII 1983 5

УДК 539.376

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

А. В. Манжиров

О влиянии неоднородного старения на концентрацию напряжений около отверстий в нелинейных вязкоупругих телах

(Представлено академиком АН Армянской ССР Н. Х. Арутюняном 14/XII 1982)

Исследованы задачи о концентрации напряжений возле кругового отверстия и сферической полости в неоднородно-стареющей нелинейной вязкоупругой среде. Показано, что фактор неоднородного старения существенно влияет на напряженно-деформированное состояние около концентраторов.

Рассмотрим задачи о концентрации напряжений у кругового отверстия (плоская деформация, $n=2$) и у сферической полости ($n=3$), находящихся в неоднородно-стареющей нелинейной вязкоупругой среде, на которую действует радиальное напряжение $P(t)$, приложенное на бесконечности.

Считая материал среды несжимаемым и пользуясь уравнениями состояния в форме [1,2], будем иметь:

$$s(t, r)=2G(t+\varkappa(r))\Big\{e(t, r)\varphi^*[\varepsilon_i(t, r)]+$$

$$+\int_{\tau_0}^{t} e(\tau, r)\varphi^*[\varepsilon_i(\tau, r)]R(t+\varkappa(r), \tau+\varkappa(r))d\tau\Big\}, \qquad (1)$$

$$\frac{\partial\sigma_r}{\partial r}+(n-1)\frac{\sigma_r-\sigma_\theta}{r}=0; \qquad (2)$$

$$\frac{\partial u_r}{\partial r}+(n-1)\frac{u_r}{r}=0, \quad \varepsilon_r=\frac{\partial u_r}{\partial r}; \quad \varepsilon_\theta=\frac{u_r}{r}; \qquad (3)$$

$$\varepsilon_i(t, r)=\sqrt{n^2-3n+3}\,|\varepsilon_\theta(t, r)|; \qquad (4)$$
$$\varphi^*[\varepsilon_i(t, r)]=\varepsilon_i^{\mu-1}(t, r),$$

где $s(t, r)$ и $e(t, r)$ — девиаторы тензоров напряжений и деформации, $G(t)$ характеризует упругие свойства материала и при $\varphi^*\equiv1$ имеет смысл упругомгновенного модуля сдвига, φ^* — некоторая заранее известная функция, $\varepsilon_i(t, r)$ — интенсивность деформаций, t — текущий момент времени, τ_0 — возраст материала в точке отсчета времени в момент приложения нагрузки, $R(t, \tau)$ — ядро релаксации, r — радиальная координата, $\varkappa(r)$ — функция неоднородного старения, σ_r и σ_θ — компоненты тензора напряжений, ε_r и ε_θ — компоненты тензора деформации, u_r — радиальное перемещение, μ — показатель нелинейности.

Полагая радиус полости или отверстия равным a, запишем граничные условия задач в виде

$$\sigma_r = P(t), \quad r = \infty;$$
$$\sigma_r = 0, \quad r = a. \tag{5}$$

Решая уравнение (3), получим, что

$$u_r = \frac{c(t)}{r^{n-1}}; \quad \varepsilon_r = (1-n)\frac{c(t)}{r^n}; \quad \varepsilon_\theta = \frac{c(t)}{r^n}, \tag{6}$$

откуда с учетом (1)—(6) и замены переменных

$$r^* = ra^{-1}; \quad t^* = t\tau_0^{-1}; \quad \tau^* = \tau\tau_0^{-1}; \quad \varkappa^*(r^*) = \varkappa(r)\tau_0^{-1};$$
$$R^*(t^*, \tau^*) = R(t, \tau); \quad R_1^*(t^*, \tau^*) = R_1(t, \tau); \quad c^*(t^*) = c(t)a^{-n};$$
$$P^*(t^*) = P(t)\psi(t)^{-1}; \quad \sigma_r^* = \sigma_r\psi(t)^{-1}; \quad \sigma_\theta^* = \sigma_\theta\psi(t)^{-1};$$
$$\psi(t) = (n-1)(n^2-3n+3)^{\frac{\mu-1}{2}} 2G_1(t)\mu^{-1}$$

(звездочки далее опустим) получим:

$$\sigma_r = P(t) - \int_r^\infty \frac{\partial\sigma_r}{\partial r}dr; \quad \sigma_\theta = \frac{r}{n-1}\frac{\partial\sigma_r}{\partial r} + \sigma_r;$$

$$\frac{\partial\sigma_r}{\partial r} = n\mu\frac{G(t+\varkappa(r))}{G_1(t)}\Big[\operatorname{sgn}(c(t))|c(t)|^\mu +$$
$$+ \int_1^t \operatorname{sgn}(c(\tau))|c(\tau)|^\mu R(t+\varkappa(r),\ \tau+\varkappa(r))d\tau\Big];$$

$$\operatorname{sgn}(c(t))|c(t)|^\mu = P(t) - \int_1^t P(\tau)K_1(t, \tau)d\tau; \tag{7}$$

$$G_1(t) = n\mu\int_1^\infty \frac{G(t+\varkappa(r))}{r^{n\mu+1}}dr;$$

$$R_1(t, \tau) = n\mu\int_1^\infty \frac{G(t+\varkappa(r))R(t+\varkappa(r), \tau+\varkappa(r))}{G_1(t)r^{n\mu+1}}dr,$$

где $K_1(t, \tau)$ есть резольвента ядра $R_1(t, \tau)$.

Нас интересует случай $r=1$. Пусть начало отсчета времени выбрано так, что $\varkappa(1)=0$, тогда в соответствии с (7)

$$\sigma_\theta = k\Phi(t, \varkappa)P(t), \quad \varkappa = \varkappa(r); \quad k = n(n-1)^{-1}\mu G(1)G_1(1)^{-1}; \tag{8}$$

$$\Phi(t, \varkappa) = \frac{G(t)G_1(1)}{G_1(t)G(1)}\Big\{1 - \int_1^t \frac{P(\tau)}{P(t)}K_1(t, \tau)d\tau +$$

$$+\int\limits_1^t\left[\frac{P(\tau)}{P(t)}-\int\limits_1^\tau \frac{P(\xi)}{P(t)}K_1(\tau,\xi)d\xi\right]R(t,\tau)d\tau\Bigg\}, \tag{9}$$

где k—коэффициент концентрации, определяющий напряженное состояние на концентраторе в упругом случае, а $\Phi(t, \varkappa)$—функция концентрации, зависящая от времени и функции неоднородного старения.

Отметим, что в линейных упругом и однородно-стареющем случаях получим известные результаты [3,4], т. е. $\Phi(t, \varkappa)\equiv 1$, $k=2$ при $n=2$ и $k=1,5$ при $n=3$.

Рассмотрим конкретный вид ядра релаксации $R(t, \tau)$. Представим его в виде

$$R(t,\tau)=\frac{1}{G(t)}\frac{\partial}{\partial\tau}[\omega(t,\tau)-G(\tau)],$$

где $\omega(t, \tau)$—мера релаксации. Тогда в соответствии с формулами (7) будем иметь

$$R_1(t,\tau)=\frac{1}{G_1(t)}\frac{\partial}{\partial\tau}[\omega_1(t,\tau)-G_1(\tau)];$$

$$\omega_1(t,\tau)=n\mu\int\limits_1^\infty\frac{\omega(t+\varkappa(r),\ \tau+\varkappa(r))}{r^{n\mu+1}}dr.$$

Пусть теперь $\omega(t, \tau)=\varphi(\tau)f(t-\tau)$, где $\varphi(\tau)$—функция, учитывающая старение материала, а $f(t-\tau)$—характеризующая его наследственные свойства. Откуда

$$\omega_1(t,\tau)=\varphi_1(\tau)f(t-\tau);\quad \varphi_1(\tau)=n\mu\int\limits_1^\infty\frac{\varphi(\tau+\varkappa(r))}{r^{n\mu+1}}dr. \tag{10}$$

Положительную монотонно убывающую функцию $\varphi(\tau)$ представим в виде $\varphi(\tau)=C+Ae^{-\beta\tau}$, тогда (см. (10))

$$\varphi_1(\tau)=C+A\nu e^{-\beta\tau};\quad \nu=n\mu\int\limits_1^\infty\frac{e^{-\beta\varkappa(r)}}{r^{n\mu+1}}dr. \tag{11}$$

Рассмотрим основные варианты неоднородного старения среды.

Случаем естественного старения среды назовем случай, когда возраст элементов с координатой $r=1$ максимален. Действительно, естественно полагать, что при возведении конструкции возраст ее внутренних элементов оказался больше возраста элементов, близких к границе. Тогда можно получить оценки $-1<\varkappa(r)\leqslant 0$ и $1\leqslant\nu<e^{\beta}$.

Случаем искусственного старения среды назовем вариант, когда возраст элементов с координатой $r=1$ минимален. В самом деле, элементы реальной конструкции, близкие к границе, наиболее подвержены различным внешним воздействиям: облучению, температуре и т. д. В этом случае $\varkappa(r)\geqslant 0$ и $0<\nu\leqslant 1$.

Отметим тот факт, что область изменения параметра неоднородного старения ν для двух указанных случаев не зависит ни от размерности задачи n, ни от показателя нелинейности μ. То же можно сказать и об области изменения функции концентрации (9).

В качестве примера построим функцию концентрации для полимерного материала [5]. Если $G(t)=G=\text{const}$, то $\Phi(t, \varkappa)=\Phi_1(t, \nu)$, и изменяя ν в известных пределах, найдем значения функции концентрации для случаев естественного и искусственного старения среды. Следует, однако, помнить, что, задавая $\varkappa(r)$ и μ, необходимо определять для плоского или пространственного случаев свое ν (см. (11)).

Возьмем следующие значения функций и параметров:

$$f(t-\tau)=1-e^{-\gamma(t-\tau)}, \quad P(t)=\text{const}, \quad G(t)=G,$$
$$CG^{-1}=0{,}05, \quad AG^{-1}=0{,}45.$$

1. Естественное старение среды:

$$\beta=0{,}8; \quad \gamma=10; \quad \tau_0=100 \text{ сут}; \quad 1\leqslant\nu<2,2.$$

На рис. 1 показаны графики зависимости функции $\Phi_1(t, \nu)$ от параметра ν при фиксированных значениях времени $t: t=1,1-(1)$, $t=1,2-(2)$, $t=1,4-(3)$.

2. Искусственное старение среды:

$$\beta=0,08; \quad \gamma=1; \quad \tau_0=10 \text{ сут}; \quad 0<\nu\leqslant1.$$

На рис. 2 имеем аналогичные предыдущим графики для $t=2$ $-(1)$, $t=3-(2)$, $t=4-(3)$.

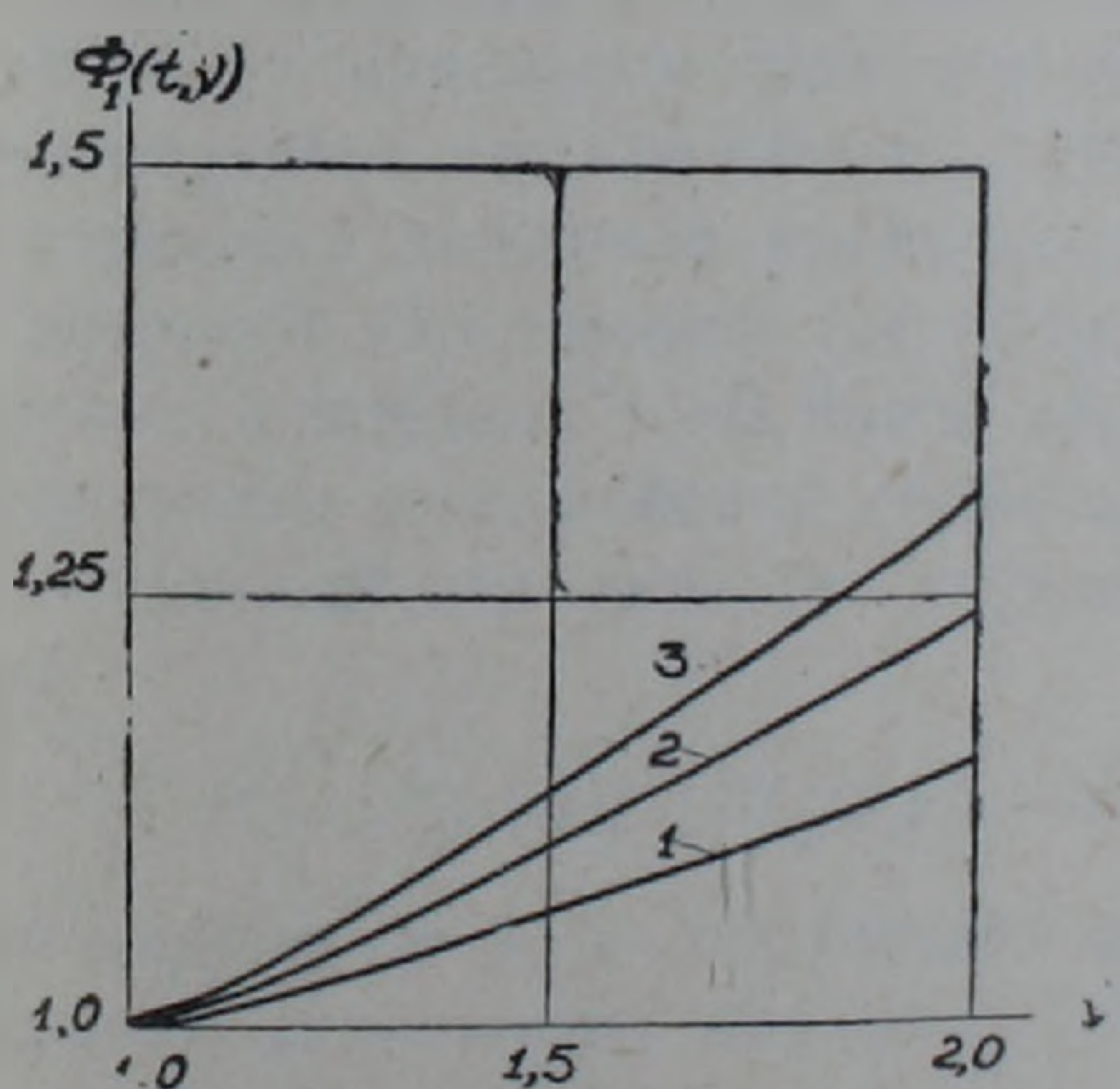

Рис. 1

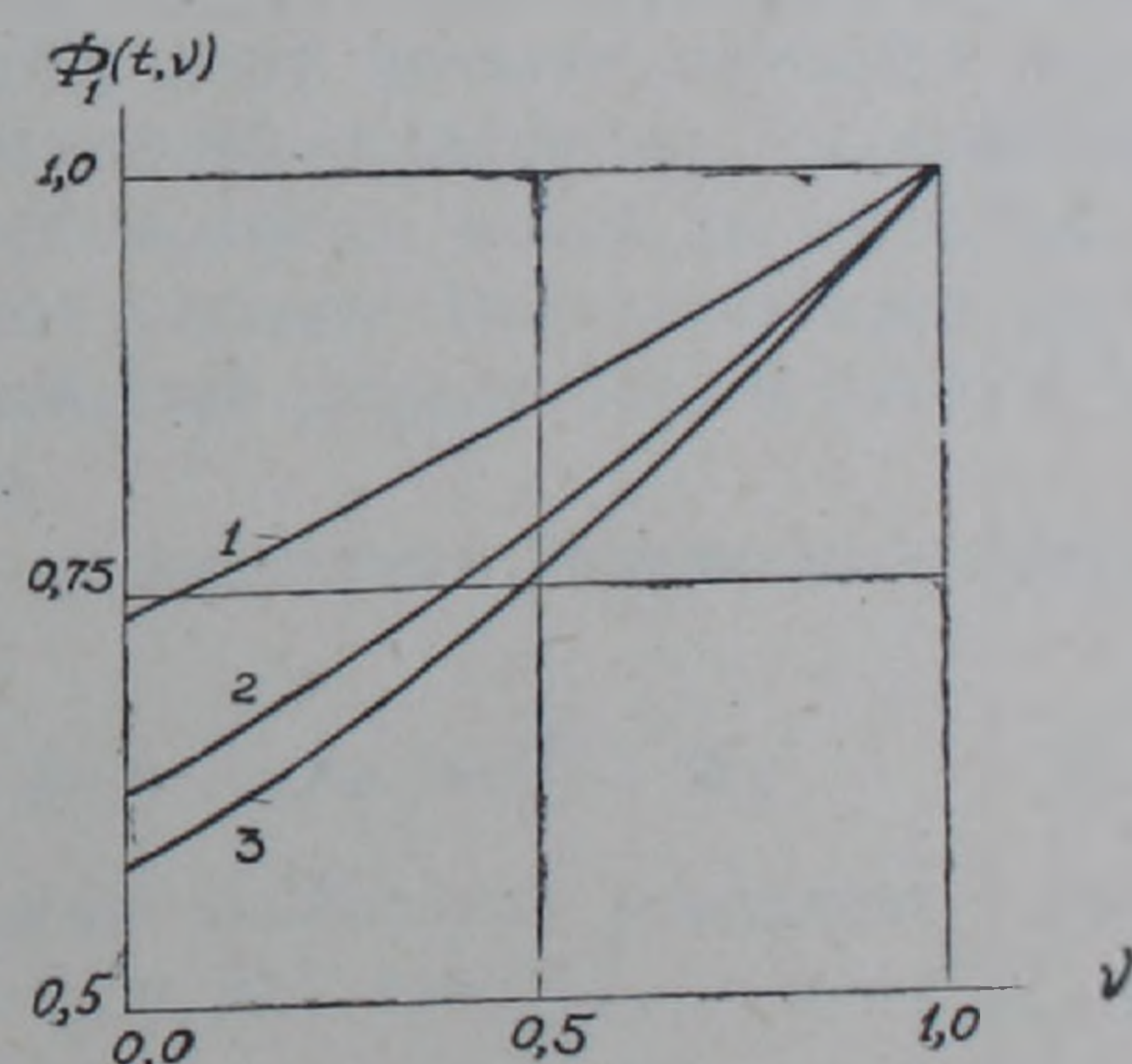

Рис. 2

На основании проведенных исследований можно утверждать: в случае однородного старения среды напряжения на концентраторах не зависят от времени и совпадают с упругими; естественно неоднородно-стареющая среда создает неблагоприятную ситуацию на концентраторах, поскольку с течением времени начальные (упругие) напряжения могут значительно возрасти (см. рис. 1); искусственно неоднородно-стареющая среда обладает улучшающимися во времени свойствами и может уменьшить начальные окружные напряжения почти вдвое (см. рис. 2).

Московский Ордена Трудового Красного Знамени
инженерно-строительный институт им. В. В. Куйбышева

Ա. Վ. ՄԱՆԺԻՐՈՎ

Ոչ գծային առաձգամածուցիկ մարմիններում անցքերի մոտ լարումների կոնցենտրացիայի վրա անհամասեռ ծերացման ազդեցության մասին

Դիտարկվում են անհամասեռ ծերացող ոչ գծային առաձգամածուցիկ միջավայրում շրջանային անցքի և գնդաձև խոռոչի մոտ լարումների կոնցենտրացիայի վերաբերյալ խնդիրներ։ Ենթադրվում է, որ առաձգամածուցիկ միջավայրն անսեղմելի է։

Ցույց է տրվում, որ միջավայրի նյութի անհամասեռ ծերացման գործոնը էապես է ազդում կոնցենտրատորների մոտ լարված-դեֆորմացված վիճակի վրա։

Բերվում են թվային արդյունքներ։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Н. Х. Арутюнян*, ДАН СССР, т. 229, № 3(1976). [2] *Н. Х. Арутюнян*, ПММ, т. 23, вып. 5(1959). [3] *Н. Х. Арутюнян*, Некоторые вопросы теории ползучести, Гостехиздат, М.—Л., 1952. [4] *Ю. Н. Работнов*, Механика деформируемого твердого тела, Наука, М., 1979. [5] *L. C. E. Struik*, Physical aging in amorphous polymers and other materials, Amsterdam: Elsevier, 1978.