

УДК 517.948.32

МАТЕМАТИКА

Ву Ким Туан

Интегральные уравнения Вольтерра, содержащие функции F_2 и G_2 в ядре

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 11/1 1983)

В настоящей работе устанавливаются критерии обратимости и формулы обращения 10 двумерных интегральных уравнений Вольтерра с функциями Аппеля—Горна F_2 и G_2 в ядрах. Одно из этих уравнений исследуется более подробно. При этом используются определения операторов дробного интегро-дифференцирования Римана—Лиувилля I^μ произвольного комплексного порядка μ из работ ^(1,2) и методы, подобные изложенным там.

1°. Пусть задано двумерное интегральное уравнение Вольтерра вида

$$T_A(\alpha, \beta, \beta', \gamma, \gamma')f \equiv \int_0^x \int_0^y \frac{(x-u)^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)} \frac{(y-v)^{\gamma'-1}}{\Gamma(\gamma')} F_2\left(\alpha, \beta, \beta', \gamma, \gamma'; \frac{u-x}{a+u+v}, \frac{v-y}{a+u+v}\right) \times f(u, v) du dv = g(x, y); \quad 0 \leq x \leq \delta, \quad 0 \leq y \leq \delta', \quad a \in [-\delta - \delta', 0], \quad (A)$$

где $F_2(\alpha, \beta, \beta', \gamma, \gamma'; x, y)$ —функция Аппеля ⁽³⁾. Его решение будем искать в классе L , где L здесь и в дальнейшем означает множество комплекснозначных функций, заданных и интегрируемых в прямоугольнике $[0, \delta] \times [0, \delta']$. Другие уравнения такого рода, содержащие в ядрах функции Горна $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Psi_1, \Xi_2, F_3$ ⁽³⁾, но с простым интегралом по отрезкам оси, рассматривались ранее в работах ^(1,4-6).

Оператор $T_A(\alpha, \beta, \beta', \gamma, \gamma')f$ при $\alpha=0$ превращается в двойной дробный интеграл Римана—Лиувилля ⁽⁷⁾, который является частным случаем общего n -мерного дробного интеграла, изучавшегося в ⁽⁸⁾.

В пункте 2 решение уравнения (A) выписывается с помощью операторов I_x^μ, I_y^μ , через которые обозначены операторы I^μ в случаях, когда I^μ действуют соответственно по переменным x и y . Другие применения операторов I^μ можно найти, например, в работах ^(9,10).

2°. Из ограниченности функции $F_2\left(\alpha, \beta, \beta', \gamma, \gamma'; \frac{u-x}{a+u+v}, \frac{v-y}{a+u+v}\right)$ в прямоугольнике $(x, y) \in [0, \delta] \times [0, \delta']$ несложно установить, что справедлива следующая

Теорема 1. Пусть $\operatorname{Re} \gamma, \operatorname{Re} \gamma' > 0$. Тогда оператор $T_A(\alpha, \beta, \beta', \gamma, \gamma')$ действует из пространства L в L .

Теорема 2. Пусть $\operatorname{Re} \gamma, \operatorname{Re} \gamma' > 0$. Если $\operatorname{Re} \mu > -\operatorname{Re} \gamma, \operatorname{Re} \mu' > -\operatorname{Re} \gamma'$ и $f \in L$, то

$$I_x^\mu I_y^{\mu'} T_A(\alpha, \beta, \beta', \gamma, \gamma') f = T_A(\alpha, \beta, \beta', \gamma + \mu, \gamma' + \mu') f. \quad (1)$$

Теорема 3. Если $\operatorname{Re} \gamma, \operatorname{Re} \gamma', \operatorname{Re} \beta, \operatorname{Re} \beta' > 0$ и $f \in L$, то имеет место представление

$$T_A(\alpha, \beta, \beta', \gamma, \gamma') f = I_x^{\gamma-\beta} I_y^{\gamma'-\beta'} (a+x+y)^{-\alpha} I_x^\beta I_y^{\beta'} (a+x+y)^\alpha f(x, y). \quad (2)$$

Теорема 4. Если $\operatorname{Re} \gamma, \operatorname{Re} \gamma' > 0$ и $f \in L$, то $I_x^{-\gamma} I_y^{-\gamma'} g \in L$.

Теорема 5. Если $\operatorname{Re} \beta, \operatorname{Re} \beta' > 0$, то интегральное уравнение

$$I_x^\beta I_y^{\beta'} (a+x+y)^\alpha f(x, y) = (a+x+y)^\alpha I_x^\beta I_y^{\beta'} g(x, y) \quad (3)$$

для каждой функции $g \in L$ имеет решение $f \in L$ и наоборот — для каждой $f \in L$ имеет решение g из класса L .

Применив теоремы 3—5, можно получить следующую основную теорему.

Теорема 6. Пусть $\operatorname{Re} \gamma, \operatorname{Re} \gamma', \operatorname{Re} \beta, \operatorname{Re} \beta' > 0$. Тогда необходимым и достаточным условием для того, чтобы уравнение (A) имело решение $f \in L$, является условие $I_x^{-\gamma} I_y^{-\gamma'} g \in L$. Если оно выполняется, то решение единственно и выражается формулой

$$f(x, y) = (a+x+y)^{-\alpha} I_x^{\gamma-\beta} I_y^{\gamma'-\beta'} (a+x+y)^\alpha I_x^\beta I_y^{\beta'} g(x, y). \quad (A')$$

3°. Рассмотрим теперь аналогичные уравнения с функцией F_2 в ядрах:

$$\int_0^x \int_0^y \frac{(x-u)^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)} \frac{(y-v)^{\gamma'-1}}{\Gamma(\gamma')} F_2\left(\alpha, \beta, \beta', \gamma, \gamma'; \frac{x-u}{a+x+y}, \frac{y-v}{a+x+y}\right) \quad (B)$$

$$\times f(u, v) du dv = g(x, y), \quad \operatorname{Re}(\gamma-\beta), \operatorname{Re}(\gamma'-\beta') > 0, \quad a \notin [-\delta-\delta', 0];$$

$$\int_0^x \int_0^y \frac{(x-u)^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)} \frac{(y-v)^{\gamma'-1}}{\Gamma(\gamma')} F_2\left(\alpha, \beta, \beta', \gamma, \gamma'; \frac{u-x}{a+u-v}, \frac{y-v}{a+u-v}\right) \quad (C)$$

$$\times f(u, v) du dv = g(x, y), \quad \operatorname{Re} \beta, \operatorname{Re} \beta' > 0, \quad a \notin [-\delta, \delta'];$$

$$\int_0^x \int_0^y \frac{(x-u)^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)} \frac{(y-v)^{\gamma'-1}}{\Gamma(\gamma')} F_2\left(\alpha, \beta, \beta', \gamma, \gamma'; \frac{x-u}{a+x-y}, \frac{v-y}{a+x-y}\right) \quad (D)$$

$$\times f(u, v) du dv = g(x, y), \quad \operatorname{Re}(\gamma-\beta), \operatorname{Re}(\gamma'-\beta') > 0; \quad a \notin [-\delta, \delta'];$$

$$\int_0^x \int_0^y \frac{(x-u)^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)} \frac{(y-v)^{\gamma'-1}}{\Gamma(\gamma')} (a+x+v)^{-\alpha} F_2\left(\alpha, \beta, \beta', \gamma, \gamma'; \frac{x-u}{a+x+v}, \quad (E)$$

$$\frac{v-y}{a+x+v}\right) f(u, v) du dv = g(x, y), \quad \operatorname{Re}(\gamma-\beta), \operatorname{Re} \beta' > 0, \quad a \notin [-\delta-\delta', 0];$$

$$\int_0^x \int_0^y \frac{(x-u)^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)} \frac{(y-v)^{\gamma'-1}}{\Gamma(\gamma')} (a+x-v)^{-\alpha} F_2\left(\alpha, \beta, \beta', \gamma, \gamma'; \frac{x-u}{a+x-v}, \frac{y-v}{a+x-v}\right) f(u, v) dudv = g(x, y), \quad \text{Re}(\gamma-\beta), \text{Re}\beta' > 0, \quad a \in [-\delta, \delta']. \quad (F)$$

Во всех этих уравнениях положим $\text{Re}\gamma, \text{Re}\gamma' > 0$ и $(x, y) \in [0, \delta] \times [0, \delta']$.
Справедлив следующий аналог теоремы 6.

Теорема 7. Каждое из вышеперечисленных уравнений имеет решение $f \in L$ тогда и только тогда, когда $I_x^{-\gamma} I_y^{-\gamma'} g \in L$. При таком условии эти решения единственны и выражаются соответствующими формулами вида

$$f(x, y) = I_x^{\beta-\gamma} I_y^{\beta'-\gamma'} (a+x+y)^{\alpha} I_x^{-\beta} I_y^{-\beta'} (a+x+y)^{-\alpha} g(x, y), \quad (B')$$

$$f(x, y) = (a+x-y)^{-\alpha} I_x^{-\beta} I_y^{-\beta'} (a+x-y)^{\alpha} I_x^{\beta-\gamma} I_y^{\beta'-\gamma'} g(x, y), \quad (C')$$

$$f(x, y) = I_x^{\beta-\gamma} I_y^{\beta'-\gamma'} (a+x-y)^{\alpha} I_x^{-\beta} I_y^{-\beta'} (a+x-y)^{-\alpha} g(x, y), \quad (D')$$

$$f(x, y) = I_x^{\beta-\gamma} I_y^{-\beta'} (a+x+y)^{\alpha} I_x^{-\beta} I_y^{\beta'-\gamma'} g(x, y), \quad (E')$$

$$f(x, y) = I_x^{\beta-\gamma} I_y^{-\beta'} (a+x-y)^{\alpha} I_x^{-\beta} I_y^{\beta'-\gamma'} g(x, y). \quad (F')$$

4°. Пусть теперь заданы интегральные уравнения, содержащие функцию Горна G_2 (3) в ядрах:

$$\int_0^x \int_0^y \frac{(x-u)^{-\beta}}{\Gamma(1-\beta)} \frac{(y-v)^{-\beta'}}{\Gamma(1-\beta')} (a+x+v)^{-\alpha} (a+u+y)^{-\alpha'} \quad (G)$$

$$\times G_2\left(\alpha, \alpha', \beta, \beta'; \frac{u-x}{a+x+v}, \frac{v-y}{a+u+y}\right) f(u, v) dudv = g(x, y),$$

$$a \in [-\delta-\delta', 0], \quad \text{Re}\alpha, \text{Re}\alpha' > 0, \quad \text{Re}\beta, \text{Re}\beta' < 1;$$

$$\int_0^x \int_0^y \frac{(x-u)^{-\beta}}{\Gamma(1-\beta)} \frac{(y-v)^{-\beta'}}{\Gamma(1-\beta')} (a+u+y)^{-\alpha} (a+x+v)^{-\alpha'} \quad (H)$$

$$\times G_2\left(\alpha, \alpha', \beta, \beta'; \frac{x-u}{a+u+y}, \frac{y-v}{a+x+v}\right) f(u, v) dudv = g(x, y),$$

$$a \in [-\delta-\delta', 0], \quad \text{Re}\beta, \text{Re}\beta', \text{Re}(\alpha+\beta), \text{Re}(\alpha'+\beta') < 1;$$

$$\int_0^x \int_0^y \frac{(x-u)^{-\beta}}{\Gamma(1-\beta)} \frac{(y-v)^{-\beta'}}{\Gamma(1-\beta')} (a+x-v)^{-\alpha} (a+u-y)^{-\alpha'}$$

$$\times G_2\left(\alpha, \alpha', \beta, \beta'; \frac{u-x}{a+x-v}, \frac{y-v}{a+u-y}\right) f(u, v) dudv = g(x, y), \quad (I)$$

$$a \in [-\delta, \delta'], \quad \text{Re}\alpha, \text{Re}\alpha' > 0, \quad \text{Re}\beta, \text{Re}\beta' < 1;$$

$$\int_0^x \int_0^y \frac{(x-u)^{-\beta}}{\Gamma(1-\beta)} \frac{(y-v)^{-\beta'}}{\Gamma(1-\beta')} (a+u-y)^{-\alpha} (a+x-v)^{-\alpha'} \quad (J)$$

$$\times G_2\left(\alpha, \alpha', \beta, \beta'; \frac{x-u}{a+u-y}, \frac{v-y}{a+x-v}\right) f(u, v) du dv = g(x, y),$$

$$\alpha \notin [-\delta, \delta'], \operatorname{Re} \beta, \operatorname{Re} \beta', \operatorname{Re}(\alpha + \beta), \operatorname{Re}(\alpha' + \beta') < 1.$$

Во всех этих уравнениях $(x, y) \in [0, \delta] \times [0, \delta']$.

Теорема 8. Необходимым и достаточным условием того, чтобы каждое из уравнений (G), (H), (I), (J) имело решение $f \in L$, является условие $I_x^{\beta-1} I_y^{\beta'-1} g \in L$. При таком условии эти решения единственны и выражаются соответственно формулами

$$f(x, y) = (a+x+y)^{\alpha+\alpha'+\beta+\beta'-1} I_x^{-\alpha} I_y^{-\alpha'} (a+x+y)^{1-\beta-\beta'} \quad (G')$$

$$\times I_x^{\alpha+\beta-1} I_y^{\alpha'+\beta'-1} g(x, y),$$

$$f(x, y) = I_x^{\alpha+\beta-1} I_y^{\alpha'+\beta'-1} (a+x+y)^{1-\beta-\beta'} I_x^{-\alpha} I_y^{-\alpha'} (a+x+y)^{\alpha+\alpha'+\beta+\beta'-1} g(x, y), \quad (H)$$

$$f(x, y) = (a+x-y)^{\alpha+\alpha'+\beta+\beta'-1} I_x^{-\alpha} I_y^{-\alpha'} (a+x-y)^{1-\beta-\beta'} \quad (I)$$

$$\times I_x^{\alpha+\beta-1} I_y^{\alpha'+\beta'-1} g(x, y),$$

$$f(x, y) = I_x^{\alpha+\beta-1} I_y^{\alpha'+\beta'-1} (a+x-y)^{1-\beta-\beta'} I_x^{-\alpha} I_y^{-\alpha'}$$

$$\times (a+x-y)^{\alpha+\alpha'+\beta+\beta'-1} g(x, y). \quad (J)$$

Автор выражает искреннюю благодарность академику АН АрмССР М. М. Джрбашяну за внимание и ценные замечания по работе и доценту БГУ им. В. И. Ленина О. И. Маричеву за помощь при оформлении статьи.

Белорусский государственный университет
им. В. И. Ленина

ՎՈՒ ԿԻՄ ԹՈՒԱՆ

Վոլտերայի տիպի ինտեգրալային հավասարումներ, որոնք կորիզում պարունակում են F_2 և G_2 ֆունկցիաները

Դիտարկվում են կորիզում Գորնի F_2 ֆունկցիաները պարունակող Վոլտերայի 6 երկչափ և G_2 պարունակող նման տիպի ինտեգրալային հավասարումներ: Տրվում է այդ հավասարումներից մեկի մանրամասն հետազոտումը և բերվում են բոլոր 10 հավասարումների լուծումները: Այդ լուծումները տրվում են կոմպլեքս կարգի (2, 5, 9, 1) Ռիման—Հիլդիլի կոտորակային ինտեգրալ-դիֆերենցման օպերատորի և աստիճանային ֆունկցիաներով բաղմապատկման օպերատորների կոմպոզիցիայի տեսքով:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ E. R. Love, Proc. Edinburgh Math. Soc., v. 15, № 3 (1967). ² T. R. Prabhakar, Canad. Math. Bull., v. 14, № 3 (1971). ³ Г. Бейтмен, А. Эрдейи, Высшие трансцендентные функции, т. 1, Наука, М., 1965. ⁴ О. И. Маричев, ДАН СССР, т. 204, № 3 (1972). ⁵ H. M. Srivastava, R. G. Buschman, Integral Equations with special function kernels, New York — London — Sydney, 1977. ⁶ T. R. Prabhakar, SIAM J. Math. Anal., v. 3, № 3 (1972). ⁷ D. P. Mourya, Proc. Indian Acad. Sci., v. 72, № 4 (1970). ⁸ А. А. Килбас, Ву Ким Туан, ДАН БССР, т. 26, № 10 (1982). ⁹ М. М. Джрбашян, Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, Наука, М., 1966. ¹⁰ М. М. Джрбашян, А. Б. Нерсисян, Изв. АН АрмССР. Математика, т. 3, № 1 (1968). ¹¹ A. Erdelyi, Proc. Roy. Soc. Edinburgh. Sec. A, v. 62, № 3 (1946—48).