ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXVII 1983 5

МАТЕМАТИКА

УДК 513.88

Р. В. Акопян

О формуле следов для J-неотрицательных операторов при ядерных возмущениях

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. А. Александряном 9/XII 1982)

В этой заметке для обратимого J-неотрицательного оператора выводится формула следов при ядерных возмущениях.

В работе ([1]) И. М. Лифшиц для двух самосопряженных операторов, $\widetilde{A}$, A-разность которых конечномерна, и еще при некоторых дополнительных условиях получил (не вполне строго) так называемую формулу следов $\mathrm{sp}\{\Phi(\widetilde{A})-\Phi(A)\}=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\xi(\lambda)\Phi'(\lambda)d\lambda$, где $\Phi(\lambda)$—функция достаточно общего класса.

Вскоре М. Г. Крейн в работе ([2]) дал строгое доказательство формулы следов в более общем случае, когда разность операторов $\widetilde{A}$ и A ядерна.

В работе ([3]) формула следов были перенесена на случай двух J-неотрицательных операторов $\widetilde{A}$ и A, разность которых конечномерна и J-неотрицательна.

1. Напомним некоторые хорошо известные факты для пространств с индефинитной метрикой (см. ([4])).

Пусть H—гильбертово пространство, в котором наряду с обычным скалярным произведением (f, g) $(f, g\in H)$ введено индефинитное скалярное произведение $[f, g]=(Jf, g)$, $J=P_+-P_-$, где $P_\pm$—взаимно дополнительные ортопроекторы в H.

Для любого линейного оператора A, действующего в плотной области определения $D(A)$, соответствующий J-сопряженный оператор однозначно определяется при помощи равенства $[Af,g]=[f,A^+g]$, $f\in D(A)$.

Оператор A называется *J-самосопряженным*, если $A^+=A$. В дальнейшем под *J-неотрицательным* оператором понимается J-самосопряженный оператор, удовлетворяющий условию $[Af, f]\geqslant 0$, $\in D(A)$.

Пусть A—J-неотрицательный оператор с непустым резольвентным множеством, спектральная функция которого регулярна на бесконечности. Тогда, как известно ([5]), оператор A имеет спектральное разложение: $A=S+\int\limits_{-\infty}^{\infty}\lambda dE(\lambda)$.

При этом резольвента $(A-zI)^{-1}$ представима в виде

$$(A-zI)^{-1}=-\frac{I}{z}+\frac{1}{z}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dF(\lambda)}{\lambda-z}=-\frac{I}{z}-\frac{S}{z^2}+\frac{1}{z}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\lambda dE(\lambda)}{\lambda-z},$$

где $[F(\lambda)f, f]$—неубывающая функция такая, что при любом $f\in H$ сходится интеграл $\int\limits_{|\lambda|>1}\frac{d[F(\lambda)f, f]}{|\lambda|}$.

2. Дальше, всюду предполагается, что спектральная функция $E(\lambda)$ оператора A регулярна на бесконечности.

Лемма 1. *Пусть A—непрерывно обратимый J-неотрицательный оператор, K—любой J-неотрицательный ограниченный оператор и $\widetilde{A}=A+K$.*

Тогда оператор A также непрерывно обратимый оператор.

Лемма 2. *Пусть A есть J-неотрицательный непрерывно обратимый оператор, $K=\sum\limits_{i=1}^{\infty}\alpha_i[\,\cdot\,,\varphi_i]\varphi_i$, $(\alpha_i>0,\ \sum\limits_{i=1}^{\infty}\alpha_i<\infty)$—$J$-неотрицательный ядерный оператор и $\widetilde{A}=A+K$.*

Положим $A_0=A$, $A_n=A+\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i[\,\cdot\,,\varphi_i]\varphi_i=A+K_n$ $(n=1, 2, \ldots,)$.

Пусть $E^{(n)}(\lambda)$ $(n=1, 2, \ldots,)$ и $\widetilde{E}(\lambda)$ являются спектральными функциями операторов A_n и $\widetilde{A}$ $(E^{(0)}(\lambda)=E(\lambda))$ соответственно.

Тогда $\|E^{(n)}(0)-\widetilde{E}(0)\|\to 0$ при $n\to\infty$.

Доказательство. Известно, что [6] $I-2E^{(n)}(0)=$ $=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(A_n-iy)^{-1}dy$; $I-2\widetilde{E}(0)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(\widetilde{A}-iy)^{-1}dy$. Отсюда получаем

$$2[E^{(n)}(0)-\widetilde{E}(0)]=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}[(\widetilde{A}-iy)^{-1}-(A_n-iy)^{-1}]dy=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int\limits_{|y|>a}(A_n-iy)^{-1}(K_n-K)(\widetilde{A}-iy)^{-1}dy+\frac{1}{\pi}\int\limits_{|y|\leqslant a}[(\widetilde{A}-iy)^{-1}-(A_n-iy)^{-1}]dy \tag{1}$$

где $a>0$—некоторое постоянное, определяемое ниже. Так как (см. [5]) $\|(A-iy)^{-1}\|\leqslant\frac{N}{|y|}$, $\|K_n\|\leqslant M$ $(n=1, 2, \ldots,)$ и при $\frac{MN}{|y|}<1$ имеем разложение $(A_n-iy)^{-1}=(A+K_n-iy)^{-1}=(A-iy)^{-1}\sum\limits_{m=0}^{\infty}[K_n(A-iy)^{-1}]^m$, то при $|y|>2MN$ будем иметь $\|(A_n-iy)^{-1}\|\leqslant 2\|(A-iy)^{-1}\|\leqslant\frac{2N}{|y|}$ $(n=1,2\ldots)$

Поскольку согласно лемме 1 $\|(\widetilde{A}-iy)^{-1}\|\leqslant\frac{N_1}{|y|}$, то при $a=2MN$ первый интеграл в равенстве (1) имеет оценку: $\left\| \frac{1}{\pi} \int\limits_{|y|>a} (A_n - iy)^{-1} (K_n - K) \times \right.$ $\left. \times (\widetilde{A} - iy)^{-1} dy \right\| \leqslant \frac{2}{\pi} N N_1 \| K_n - K \| \int\limits_{|y|>a} \frac{dy}{y^2}$. Второй интеграл в (1) оценивается как в работе ([6]).

3. Пусть A есть J-неотрицательный непрерывно обратимый оператор, K—J-неотрицательный ядерный оператор и $\widetilde{A} = A + K$.

Составим определитель возмущения:

$$\Delta_{\widetilde{A}/A}(z) = \det(\widetilde{A} - zI)(A - zI)^{-1} = \det(I + K(A - zI)^{-1}).$$

Очевидно, что $\overline{\Delta_{\widetilde{A}/A}(z)} = \Delta_{\widetilde{A}/A}(\bar{z})$. Учитывая, что $\|(A - zI)^{-1}\| \leqslant \frac{N}{|\operatorname{Im} z|}$, как и в работе ([7]), получим

$$e^{-\frac{N\|K\|_1}{|\operatorname{Im} z|}} \leqslant |\Delta_{\widetilde{A}/A}(z)| \leqslant e^{\frac{N\|K\|_1}{|\operatorname{Im} z|}}, \tag{2}$$

где $\|K\|_1$—ядерная норма оператора K.

Из (2) следует, что имеет смысл функция $\ln \Delta_{\widetilde{A}/A}(z)$, у которой можно выбрать внутри верхней полуплоскости ($\operatorname{Im} z > 0$) однозначную ветвь, стремящуюся к нулю при $\operatorname{Im} z \to \infty$.

Если $K = \alpha[\,\cdot\,, \varphi]\varphi$, $\alpha > 0$, $\|\varphi\| = 1$, то $\Delta(z) = \Delta_{\widetilde{A}/A}(z) = 1 + \alpha[R_z(A)\varphi, \varphi]$.

В работе ([3]) установлено, что существует функция $\xi(\lambda) = \xi(\lambda, A, \widetilde{A}) \in L_1(-\infty, \infty)$ такая, что $\ln \Delta_{\widetilde{A}/A}(z) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi(\lambda) d\lambda}{\lambda - z}$, причем $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \xi(\lambda) d\lambda = \alpha[\varphi, \varphi]$.

Аргумент $\Delta_{\widetilde{A}/A}(z)$ выбирается так, что $-\pi < \arg \Delta(z) < \pi$. При этом п. в. $\xi(\lambda) = \frac{1}{\pi} \lim\limits_{\eta \downarrow 0} \arg \Delta_{\widetilde{A}/A}(\lambda + i\eta)$.

Лемма 3. *Пусть A—J-положительный оператор с регулярной спектральной функцией $E(\lambda)$ и $\widetilde{A} = A + \alpha[\,\cdot\,, \varphi]\varphi$.*

Тогда имеет место следующая оценка: $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |\xi(\lambda)| d\lambda \leqslant \alpha(1 + 2\|I - E(0)\|^2)$.

Замечание. В условиях леммы 3 оператор $S = 0$ и $E(+0) = E(-0)$. По определении положим $E(0) = E(-0)$.

Доказательство. Рассмотрим оператор $A_1 = A + \alpha[\,\cdot\,, \varphi_2]\varphi_2$, $\varphi_2 = (I - E(0))\varphi$ и составим определитель возмущений: $\Delta_1(z) = \Delta_{A_1/A}(z) = 1 + \alpha[R_z(A)\varphi_2, \varphi_2]$.

Как и в работе ([3]), будем иметь $\ln \Delta_1(z) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi_1(\lambda) d\lambda}{\lambda - z}$, причем почти всюду $\xi_1(\lambda) = \frac{1}{\pi} \lim\limits_{\eta \downarrow 0} \arg \Delta_1(\lambda + i\eta)$. Отсюда следует, что $\xi_1(\lambda) = 0$ при $\lambda < 0$ и $\xi_1(\lambda) \geqslant 0$ при $\lambda > 0$. Обозначим граничные значения $\Delta(x + iy)$ ($\Delta_1(x + iy)$) при $y \downarrow 0$ через $\Delta(x)$ ($\Delta_1(x)$).

Так как $\Delta(z)=1+\alpha\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{d[E(\lambda)\varphi,\varphi}{\lambda-z}=1+\alpha\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{d[E(\lambda)\varphi_1,\varphi_1]}{\lambda-z}+\alpha\int\limits_{0}^{\infty}\frac{d[E(\lambda)\varphi_2,\varphi_2]}{\lambda-z}$,

где $\varphi_1=E(0)\varphi$ и $\Delta_1(z)=1+\alpha\int\limits_{0}^{\infty}\frac{d[E(\lambda)\varphi_2,\varphi_2]}{\lambda-z}$, то при $x>0$ будем иметь:

$$\operatorname{Im}\Delta(x)=\operatorname{Im}\Delta_1(x),\quad \operatorname{Re}\Delta(x)=\operatorname{Re}\Delta_1(x)+\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{d[E(\lambda)\varphi_1,\varphi_1]}{\lambda-x}\geqslant\operatorname{Re}\Delta_1(x).$$

Поскольку при $x>0$, $\operatorname{Im}\Delta(x)\geqslant 0$, то $\arg\Delta(x)\leqslant\arg\Delta_1(x)$, т. е. почти всюду $0\leqslant\xi(\lambda)\leqslant\xi_1(\lambda)$ при $\lambda>0$.

Поэтому $\int\limits_{0}^{\infty}\xi(\lambda)d\lambda\leqslant\int\limits_{0}^{\infty}\xi_1(\lambda)\,d\lambda=\alpha[\varphi_2,\varphi_2]\leqslant\alpha\|I-E(0)\|^2$. Так как $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\xi(\lambda)d\lambda=\alpha[\varphi,\varphi]$, то $\left|\int\limits_{-\infty}^{0}\xi(\lambda)d\lambda\right|=\left|\alpha[\varphi,\varphi]-\int\limits_{0}^{\infty}\xi(\lambda)d\lambda\right|\leqslant\alpha|[\varphi,\varphi]|+$ $+\int\limits_{0}^{\infty}\xi_1(\lambda)d\lambda\leqslant\alpha(1+\|I-E(0)\|^2)$. Следовательно $\int\limits_{-\infty}^{\infty}|\xi(\lambda)|d\lambda=\int\limits_{-\infty}^{0}|\xi(\lambda)|\,d\lambda+$ $+\int\limits_{0}^{\infty}\xi(\lambda)d\lambda\leqslant\alpha(1+2\|I-E(0)\|^2)$.

Лемма 3 доказана.

Теорема 1. *Пусть A есть J-неотрицательный непрерывно обратимый оператор с регулярной спектральной функцией на бесконечности, K есть J-неотрицательный ядерный оператор и $\widetilde{A}=A+K$.*

Тогда существует функция $\xi(\lambda)=\xi(\lambda,A,\widetilde{A})\in L_1(-\infty,\infty)$ такая, что

$$\ln\Delta_{\widetilde{A}/A}(z)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\xi(\lambda)d\lambda}{\lambda-z},\tag{3}$$

причем $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\xi(\lambda)d\lambda=\operatorname{sp}K$.

Функция $\xi(\lambda)$ для почти всех λ определяется формулой

$$\xi(\lambda)=\frac{1}{\pi}\lim_{\eta\downarrow 0}\arg\Delta_{\widetilde{A}/A}(\lambda+i\eta).$$

Заметим, что если отбросить требование непрерывной обратимости, то теорема 1 становится неверной ([3]).

Доказательство. Пусть $K=\sum\limits_{l=1}^{\infty}\alpha_l[\,\cdot\,,\varphi_l]\varphi_l$, $\alpha_l>0$, $\|\varphi_l\|=1$ и $\sum\limits_{l=1}\alpha_l<\infty$. Введем обозначения: $A_0=A$, $A_n=A+\sum\limits_{l=1}^{n}\alpha_l[\,\cdot\,,\varphi_l]\varphi_l=A+K_n$ $(n=1,2,\ldots,)$.

Пусть $E^{(n)}(\lambda)$ $(E^{(0)}(\lambda)=E(\lambda))$ и $\widetilde{E}(\lambda)$ являются соответственно спектральными функциями операторов A_n и $\widetilde{A}$.

Поскольку $A_j-A_{j-1}=\alpha_j[\,\cdot\,,\varphi_j]\varphi_j$ $(j=1, 2, \ldots,)$, то существует функция $\xi_j(\lambda)=\xi_j(\lambda, A_j, A_{j-1})\in L_1(-\infty,\infty)$ такая, что $\ln\Delta_{A_j/A_{j-1}}(z)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\xi_j(\lambda)d\lambda}{\lambda-z}$.

Согласно лемме 3 $\int\limits_{-\infty}^{\infty}|\xi_j(\lambda)|d\lambda\leqslant\alpha_j(1+2\|I-E^{(j-1)}(0)\|^2$.

Из лемм 1 и 2 следует существование числа M такого, что

$$1+2\|I-E^{(j-1)}(0)\|^2\leqslant M \quad (j=1, 2, \ldots,).$$

Таким образом, в условиях теоремы 1 ряд $\sum\limits_{j=1}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}|\xi_j(\lambda)|d\lambda$ сходится.

Так как $\Delta_{A_n/A}(z)=\det(I+K_nR_z(A))$ и $K_n\to K$ в ядерной норме, то $\Delta_{A_n/A}(z)\to\det(I+KR_z(A))=\Delta_{\widetilde{A}/A}(z)$.

С другой стороны $\ln\Delta_{A_n/A}(z)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\sum\limits_{j=1}^{n}\xi_j(\lambda)}{\lambda-z}d\lambda$. Поэтому при $n\to\infty$

$\ln\Delta_{A_n/A}\to\ln\Delta_{\widetilde{A}/A}(z)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\xi(\lambda)d\lambda}{\lambda-z}$, где $\xi(\lambda)=\sum\limits_{-\infty}^{\infty}\xi_j(\lambda)$, причем этот ряд сходится абсолютно в $L_1(-\infty, \infty)$. Кроме того

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\xi(\lambda)d\lambda=\sum_{j=1}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\xi_j(\lambda)d\lambda=\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_j[\varphi_j, \varphi_j]=\operatorname{sp}K.$$

Последнее утверждение теоремы следует из представления (3).

Теперь, используя теорему 1, как и в работе [2], устанавливается, что формула следов

$$\operatorname{sp}\{\Phi(\widetilde{A})-\Phi(A)\}=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Phi'(\lambda)\xi(\lambda)d\lambda \tag{4}$$

справедлива для любой рациональной функции $\Phi(\lambda)$ с полюсами, принадлежащими пересечению резольвентных множеств операторов A, $\widetilde{A}$ и имеющими на бесконечности плюс не выше первого порядка.

Более того, рассуждая так, как в работе [7], можно доказать следующую теорему:

Теорема 2. *Пусть A—непрерывно обратимый J-неотрицательный оператор с регулярной спектральной функцией на бесконечности, K есть J-неотрицательный ядерный оператор и $\widetilde{A}=A+K$.*

Тогда формула следов (4) имеет место для любой комплексно-значной непрерывно дифференцируемой функции $\Phi(\lambda)$ такой, что

$$\Phi(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t}\, d\omega(t), \quad где \quad \int_{-\infty}^{\infty} |t|\, |d\omega(t)| < \infty.$$

В заключение выражаю благодарность М. Г. Крейну за обсуждение результатов работы.

Ереванский государственный университет

Ռ. Վ. ՀԱԿՈԲՅԱՆ

Հետքերի բանաձևը J-ոչ բացասական օպերատորների համար միջուկային գրգռումների դեպքում

Աշխատանքում արտածվում է հետքերի բանաձևը J-ոչ բացասական օպերատորների համար միջուկային գրգռումների դեպքում։

Ապացուցվում է հետևյալ թեորեմը՝

Դիցուք A-ն J-ոչ բացասական օպերատոր է, որի սպեկտրալ չափը ռեգուլյար է անվերջությունում և ունի սահմանափակ հակադարձ, K-ն J-ոչ բացասական միջուկային օպերատոր է և $A=A+K$։

Այդ դեպքում (4) բանաձևը տեղի ունի ցանկացած

$$\Phi(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t}\, d\omega(t)$$

տեսքի ֆունկցիայի համար, որտեղ՝

$$\int_{-\infty}^{\infty} |t|\, |d\omega(t)| < \infty.$$

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *И. М. Лифшиц*, УМН, т. 7, № 1(47) (1952). [2] *М. Г. Крейн*, Мат. сб., т. 33(75), № 3 (1953). [3] *Р. В. Акопян*, ДАН АрмССР, т. 57, № 4 (1973). [4] *М. Г. Крейн*, Вторая летняя мат. школа, Киев, 1965. [5] *Р. В. Акопян*, Изв. АН АрмССР, т. 15, № 5 (1980). [6] *Т. Като*, Теория возмущений линейных операторов, Мир, М., 1972. [7] *М. Г. Крейн*, Первая летняя мат. школа, Наукова думка, Киев, 1964.