УДК 539.3.01 517.944

МЕХАНИКА

С. С. Заргарян

Об особенностях решений системы сингулярных интегральных уравнений плоской теории упругости при заданных на границе напряжениях

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР О. М. Сапонджяном 29/XII 1982)

В настоящей работе получена асимптотика решений системы сингулярных интегральных уравнений, порожденной системой Ламе для внешней области в окрестности угловых точек контура плоской области, когда на контуре заданы напряжения. Асимптотика решений системы, сопряженной к рассматриваемой, получена в (1).

Полученные формулы для асимптотики решений могут быть использованы при численной реализации решений рассматриваемой системы интегральных уравнений, как это сделано в (2).

Для определения асимптотики применяется метод, использованный в (3) для определения асимптотики решений интегральных уравнений теории логарифмического потенциала со смешанными краевыми условиями.

Пусть $\partial\Omega$ простая замкнутая кусочно-гладкая кривая с конечным числом угловых точек $p_1, p_2, \dots, p_m$. Обозначим через $\Omega^{(i)}$ ограниченную область, расположенную внутри, а через $\Omega^{(e)}$ область, внешнюю по отношению к $\partial\Omega$. Раствор угла между полукасательными в точке p_j со стороны области $\Omega^{(e)}$ обозначим через $2\alpha_j$. Допустим, что $0 < \alpha_j < \pi$ при $j=1, 2, \dots, m$.

Рассмотрим плоскую задачу теории упругости в перемещениях:

$$\begin{aligned} \vec{A}\vec{v}^{(e)} &\equiv \mu\Delta\vec{v}^{(e)} + (\lambda + \mu)\nabla\operatorname{div}\vec{v}^{(e)} = 0 \quad \text{в } \Omega^{(e)}, \\ T(\partial_x, n)v^{(e)} &= \vec{h} \quad \text{на } \partial\Omega \setminus \bigcup_j p_j, \end{aligned} \quad (1)$$

где $\vec{h}$ — гладкая на замкнутых дугах $\widehat{p_1 p_2}, \dots, \widehat{p_{m-1} p_m}, \widehat{p_m p_1}$ вектор-функция.

Решение задачи (1) будем искать с помощью обобщенного упругого потенциала простого слоя (4)

$$(V\vec{\psi})(x) = \int_{\partial\Omega} \Gamma(x-y)\vec{\psi}(y) d_y s. \quad (2)$$

Учитывая граничные свойства операции $T(\partial_x, n)$ от потенциала (2) и граничное условие задачи (1), для вектор-функции $\vec{\psi}$ получим систему сингулярных интегральных уравнений (5)

$$-\vec{\psi}(x) + \int_{\partial\Omega} \vec{\psi}(y) T(\partial_y, n) \Gamma(x, y) d_y s = \vec{h}(x), \quad x \in \partial\Omega \setminus U p_j, \quad (3)$$

разрешимость которой в весовых классах Гёльдера исследована в (6). Пусть $v^{(i)}$ — решение задачи

$$A v^{(i)} = 0 \text{ в } \Omega^{(i)}, \quad \vec{v}^{(i)} = \vec{v}^{(e)} \text{ на } \partial\Omega. \quad (4)$$

Ввиду непрерывности предельных значений обобщенного упругого потенциала простого слоя и в силу формулы скачка для предельных значений оператора напряжений от потенциала (2) имеем

$$2\vec{\psi} = T(\partial_x, n) \vec{v}^{(i)} - T(\partial_x, n) \vec{v}^{(e)}. \quad (5)$$

Асимптотика решений системы интегральных уравнений (3) вблизи угловой точки p_j выводится из равенства (5).

Предположим, что вблизи точки p_j область $\Omega^{(e)}$ совпадает с сектором $\{x_1 + ix_2 = r e^{i\theta}; 0 < \rho < \delta, -\alpha < \theta < \alpha\}$.

Пусть $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Решения задач (1) и (4) при $\rho \rightarrow 0$ имеют асимптотику

$$\vec{v}^{(e)} - \vec{v}^{(e)}(0) = O(r), \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \vec{v}^{(i)} - \vec{v}^{(e)}(0) \sim \vec{e}_\rho C \rho^{\lambda_u} & \left\{ \frac{\sin(\lambda_u - 1)(\pi - \alpha)}{\sin(\lambda_u + 1)(\pi - \alpha)} \sin(\lambda_u + 1)\theta - \sin(\lambda_u - 1)\theta \right\} + \\ & + \vec{e}_\theta v_2 C \rho^{\lambda_u} \left\{ -\frac{\cos(\lambda_u - 1)(\pi - \alpha)}{\cos(\lambda_u + 1)(\pi - \alpha)} \cos(\lambda_u + 1)\theta + \cos(\lambda_u - 1)\theta \right\}, \\ v_2 = \frac{x + \lambda_u}{x - \lambda_u}, \quad & -(\pi - \alpha) \leq \theta \leq \pi - \alpha, \end{aligned} \quad (7)$$

где обозначения констант совпадают с принятыми в (1).

Отсюда и из (5) получим

$$\begin{aligned} \vec{\psi} \sim \vec{e}_\rho C \frac{1}{2} \rho^{\lambda_u - 1} & [\mp 2\mu\lambda_u \pm \mu(\lambda_u + 1)(1 - v_2)] \sin(\lambda_u - 1)(\pi - \alpha) + \\ & + \vec{e}_\theta C \frac{1}{2} \rho^{\lambda_u - 1} [-2\mu\lambda_u v_2 - \mu(\lambda_u - 1)(1 - v_2)] \cos(\lambda_u - 1)(\pi - \alpha), \end{aligned} \quad (8)$$

где верхние знаки соответствуют лучу $\theta = \pi - \alpha$, а нижние — лучу $\theta = -(\pi - \alpha)$.

Следуя (7), применяя формулу Бетти по области $\Omega^{(i)} = \Omega^{(i)} \cap \{|y - x| > \varepsilon\}$ при $x = p_j$ и $\varepsilon \rightarrow 0$ к вектор-функциям $v^{(i)} - v^{(i)}(0)$ и $\zeta^{(i)}$, где $\zeta^{(i)}$ — решение задачи

$$A \vec{\zeta}^{(i)} = 0 \text{ в } \Omega^{(i)}, \quad \vec{\zeta}^{(i)} = 0 \text{ на } \partial\Omega \setminus p_j, \quad (9)$$

имеющее асимптотику

$$\begin{aligned} \vec{\zeta}^{(i)} = \vec{e}_\rho \rho^{-\lambda_u} & \left\{ -\frac{\sin(\lambda_u + 1)(\pi - \alpha)}{\sin(\lambda_u - 1)(\pi - \alpha)} \sin(\lambda_u - 1)\theta + \sin(\lambda_u + 1)\theta \right\} + \\ & + \vec{e}_\theta v_2^{-1} \rho^{-\lambda_u} \left\{ -\frac{\cos(\lambda_u + 1)(\pi - \alpha)}{\cos(\lambda_u - 1)(\pi - \alpha)} \cos(\lambda_u - 1)\theta + \cos(\lambda_u + 1)\theta \right\} + O(\rho^\lambda), \end{aligned} \quad (10)$$

для постоянной C с учетом (4) получаем следующую формулу:

$$C = -k_2^{-1} \int_{\partial\Omega} (\vec{v}^{(e)} - \vec{v}^{(e)}(0)) T(\partial_y, n) \vec{z}^{(i)} ds. \quad (11)$$

Введем решение $z^{(e)}$ в области $\Omega^{(e)}$ решением задачи

$$A\vec{z}^{(e)} = 0 \text{ в } \Omega^{(e)}, \quad T(\partial_x, n)\vec{z}^{(e)} = T(\partial_x, n)\vec{z}^{(i)} \text{ на } \partial\Omega \setminus p_j, \quad (12)$$

где n — нормаль, внешняя по отношению к $\Omega^{(i)}$.

Покажем, что задача (12) имеет исчезающее на бесконечности решение, имеющее вблизи точки p_j асимптотику

$$\begin{aligned} \vec{z}^{(e)} = & e_{\rho} \rho^{-\lambda_u} \{ -A_1 \sin(\lambda_u - 1)\theta + A_3 \sin(\lambda_u + 1)\theta \} + \\ & + \vec{e}_{\theta} \rho^{-\lambda_u} \{ A \cos(\lambda_u - 1)\theta + v_2 A_3 \cos(\lambda_u + 1)\theta \} + O(1), \end{aligned} \quad (13)$$

где постоянные A_1 и A_3 однозначно определяются из системы

$$\begin{aligned} A_1 \sin(\lambda_u - 1)\alpha - A_3 \frac{\lambda_u - 1}{\alpha + \lambda_u} \sin(\lambda_u + 1)\alpha &= -\frac{\alpha + 1}{\alpha + \lambda_u} \sin(\lambda_u + 1)(\pi - \alpha) \\ A_1 \cos(\lambda_u - 1)\alpha - A_3 \frac{\lambda_u + 1}{\alpha + \lambda_u} \cos(\lambda_u + 1)\alpha &= -\frac{\alpha + 1}{\alpha + \lambda_u} \cos(\lambda_u + 1)(\pi - \alpha). \end{aligned} \quad (14)$$

Обозначим через $\vec{f}$ и $\vec{g}$ первые слагаемые в правых частях вектор-функций (10) и (13) соответственно. Можно показать, что $\partial\vec{f}/\partial n = \partial\vec{g}/\partial n$ на Γ вблизи точки p_j .

Введем „срезку“-функцию η из $C^\infty(0, \infty)$: $\eta = 1$ при $\rho < \delta$ и $\eta = 0$ при $\rho > 2\delta$. Положим, что $\vec{z}^{(e)} = \eta\vec{g} - \vec{\Theta}$, где $\vec{\Theta}$ — решение задачи

$$A\vec{\Theta} = \mu \{ 2\nabla\vec{g}\nabla\eta + \vec{g}\Delta\eta \} + (\lambda + \mu)\nabla\{ \eta \operatorname{div}\vec{g} + (\vec{g} \cdot \nabla\eta) \} \text{ в } \Omega^{(e)},$$

$$T(\partial_x, n)\vec{\Theta} = T(\partial_x, n)(\eta\vec{g} - \vec{z}^{(i)}) \text{ на } \partial\Omega \setminus p_j.$$

Построенная таким образом вектор-функция $\vec{z}^{(e)}$ единственная с точностью до постоянного слагаемого, однако она может иметь логарифмический рост на бесконечности. Покажем, что в действительности такого роста нет.

Обозначим через $\gamma_i^{(i)}$ и $\gamma_i^{(e)}$ части окружности γ_ϵ , радиуса ϵ , с центром в точке p_j , расположенные в $\Omega^{(i)}$ и $\Omega^{(e)}$ соответственно, где $\epsilon > 0$ малое число. Пусть угол в точке p_j образуется прямолинейными отрезками δ_j ($j=1, 2$), являющимися радиусами окружности γ_ϵ . Обозначим еще $\Gamma_\epsilon = \partial\Omega \setminus \bigcup_{j=1}^2 \delta_j$ и γ_R — окружность достаточно большого радиуса R , внутри которого расположена $\partial\Omega$. Из условия равновесия области, заключенной между $\Gamma_\epsilon \cup \gamma_i^{(i)}$ и γ_R , следует, что

$$\int_{\gamma_R} T(\partial_y, n)\vec{z}^{(e)} ds = \int_{\Gamma_\epsilon \cup \gamma_i^{(e)}} T(\partial_y, -n)\vec{z}^{(e)} ds = \int_{\Gamma_\epsilon} T(\partial_y, -n)\vec{z}^{(e)} ds + \int_{\gamma_i^{(e)}} T(\partial_y, -n)\vec{z}^{(e)} ds.$$

В силу (2.12)

$$\int_{\Gamma_R} T(\partial_y, n) \vec{z}^{(e)} ds = \int_{\Gamma_\varepsilon} T(\partial_y, n) \vec{z}^{(i)} ds + \int_{\gamma_\varepsilon^{(e)}} T(\partial_y, -n) \vec{z}^{(e)} ds. \quad (15)$$

Учитывая, что на $\gamma_\varepsilon^{(e)}$ имеем

$$T(\partial_x, -n) \vec{z}^{(e)} = T(\partial_x, -n) \vec{g} + O(\rho^{\lambda_u - 1}),$$

(2.15) принимает вид

$$\int_{\Gamma_R} T(\partial_y, n) \vec{z}^{(e)} ds = \int_{\Gamma_\varepsilon} T(\partial_y, n) \vec{z}^{(i)} ds + \int_{\gamma_\varepsilon^{(e)}} T(\partial_y, -n) \vec{g} ds + O(\rho^{\lambda_u}). \quad (16)$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что

$$\int_{\gamma_\varepsilon^{(e)}} T(\partial_y, n) \vec{g} ds = \int_{\gamma_\varepsilon^{(i)}} T(\partial_y, n) \vec{f} ds = -\vec{e}_\theta \varepsilon^{-\lambda_u} \frac{4\mu\lambda_u(x+1)}{(\lambda_u-1)(x+\lambda_u)} \sin(\lambda_u-1)(\pi-\alpha).$$

Поэтому (2.16) записывается так:

$$\int_{\Gamma_R} T(\partial_y, n) \vec{z}^{(e)} ds = \int_{\Gamma_\varepsilon} T(\partial_y, n) \vec{z}^{(i)} ds + \int_{\gamma_\varepsilon^{(i)}} T(\partial_y, n) \vec{f} ds + \vec{O}(\rho^{\lambda_u}), \quad (17)$$

следовательно

$$\int_{\Gamma_R} T(\partial_y, n) \vec{z}^{(e)} ds = \int_{\Gamma_\varepsilon \cup \gamma_\varepsilon^{(i)}} T(\partial_y, n) \vec{z}^{(i)} ds + \vec{O}(\rho^{\lambda_u}) = \vec{O}(\rho^{\lambda_u}).$$

Поэтому на бесконечности вектор-функция $\vec{z}^{(e)}$ стремится к постоянной, которую можно положить равной нулю.

Выразим формулу (11) через граничное значение исходной задачи (1). Учитывая (6), (7) и (12),

$$-Ck_2 = \int_{\Gamma_\varepsilon \cup \gamma_\varepsilon^{(e)}} [\vec{v}^{(e)} - \vec{v}^{(e)}(0)] T(\partial_y, n) \vec{z}^{(e)} ds + \vec{O}(\rho^{1-\lambda_u}). \quad (18)$$

Применяя формулу Бетти к вектор-функциям $\vec{v}^{(e)} - \vec{v}^{(e)}(0)$ и $\vec{z}^{(e)}$, в двусвязной области, ограниченной γ_R и $\Gamma_\varepsilon \cup \gamma_\varepsilon^{(e)}$, получим равенство, которое преобразует (18) к виду

$$\begin{aligned} -Ck_2 = & - \int_{\gamma_R} [\vec{v}^{(e)} - \vec{v}(0)] T(\partial_y, n) \vec{z}^{(e)} ds + \int_{\gamma_R} \vec{z}^{(e)} T(\partial_y, n) \vec{v}^{(e)} ds + \\ & + \int_{\Gamma_\varepsilon \cup \gamma_\varepsilon^{(e)}} \vec{z}^{(e)} T(\partial_y, n) \vec{v}^{(e)} ds + \vec{O}(\rho^{1-\lambda_u}). \end{aligned}$$

Переходя в этом выражении к пределу при $R \rightarrow \infty$ и $\varepsilon \rightarrow 0$ и используя при этом выражения (6) и (13), замечаем, что интегралы по γ_R и $\gamma_\varepsilon^{(e)}$ стремятся к нулю.

Поэтому, учитывая (1), окончательно получаем

$$C = -k_2^{-1} \int_{\partial\Omega} \vec{z}^{(e)} h ds.$$

Перейдем к случаю $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Решения задач (1) и (4) имеют асимптотику

$$\begin{aligned} v^{(e)} - v^{(e)}(0) \sim \vec{e}_\rho H \rho^{\lambda_t} \left\{ -\frac{\lambda_t + 1}{2\lambda_t} (1 - \nu_1) \frac{\cos(\lambda_t - 1)\alpha}{\cos(\lambda_t + 1)\alpha} \cos(\lambda_t + 1)\theta + \cos(\lambda_t - 1)\theta \right\} + \\ + \vec{e}_\theta H \rho^{\lambda_t} \left\{ \frac{\lambda_t + 1}{2\lambda_t} (1 - \nu_1) \frac{\cos(\lambda_t - 1)\alpha}{\cos(\lambda_t + 1)\alpha} \sin(\lambda_t + 1)\theta + \nu_1 \sin(\lambda_t - 1)\theta \right\}, \quad \nu_1 = \frac{x + \lambda_t}{x - \lambda_t}, \quad (19) \\ -\alpha \leq \theta \leq \alpha; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v^{(i)} - v^{(e)}(0) \sim \vec{e}_\rho \rho^{\lambda_t} \{ B_2 \cos(\lambda_t + 1)\theta + B_4 \cos(\lambda_t - 1)\theta \} + \\ + \vec{e}_\theta \rho^{\lambda_t} \{ -B_2 \sin(\lambda_t + 1)\theta + \nu_1 B_4 \sin(\lambda_t - 1)\theta \}, \\ -(\pi - \alpha) \leq \theta \leq \pi - \alpha, \quad (20) \end{aligned}$$

где

$$B_4 = H \left\{ (\lambda_t + 1) \frac{\cos(\lambda_t - 1)\alpha}{\cos(\lambda_t + 1)\alpha} \sin(\lambda_t + 1)\pi + x \sin[\pi(\lambda_t + 1) - 2x\lambda_t] - \right. \\ \left. - \lambda_t \sin[\pi(\lambda_t + 1) - 2\alpha] \right\},$$

$$B_2 = H \left\{ -\frac{\lambda_t + 1}{2\lambda_t} (1 - \nu_1) \frac{\cos(\lambda_t - 1)\alpha}{\cos(\lambda_t + 1)(\pi - \alpha)} + \frac{\cos(\lambda_t - 1)\alpha}{\cos(\lambda_t + 1)(\pi - \alpha)} \right\} - \\ - B_4 \frac{\cos(\lambda_t - 1)(\pi - \alpha)}{\cos(\lambda_t + 1)(\pi - \alpha)},$$

а обозначения констант совпадают с принятыми в (1).

Подставляя (19) и (20) в (5), получаем

$$\begin{aligned} \vec{\psi} \sim \frac{1}{2} \rho^{\lambda_t - 1} \{ \vec{e}_\rho [-2\mu\lambda_t B_2 \cos(\lambda_t + 1)(\pi - \alpha) - (\lambda_t + 1)\mu(1 - \nu_1) B_4 \cos(\lambda_t - 1)(\pi - \alpha) + \\ + H 2\mu\lambda_t (\lambda_t + 1) (x - \lambda)^{-1} \cos(\lambda_t - 1)\alpha + H \mu (\lambda_t + 1) (1 - \nu_1) \cos(\lambda_t - 1)\alpha] \pm \\ \pm \vec{e}_\theta [-2\mu\lambda_t B_2 \sin(\lambda_t + 1)(\pi - \alpha) - B_4 \mu (\lambda_t - 1) (1 - \nu_1) \sin(\lambda_t - 1)(\pi - \alpha) - \\ - 2\mu\lambda_t (\lambda_t - 1) (x - \lambda)^{-1} H \sin(\lambda_t - 1)\alpha - \mu H (\lambda_t - 1) (1 - \nu_1) \sin(\lambda_t - 1)\alpha] \}. \end{aligned}$$

Здесь плюс соответствует лучу $\theta = -\alpha$, а минус — лучу $\theta = \alpha$. Постоянная H определяется аналогично предыдущему случаю:

$$H = k_1^{-1} \int_{\partial\Omega} \vec{\zeta}^{(e)} \cdot \vec{h} ds, \quad (21)$$

где $\vec{\zeta}^{(e)}$ — решение задачи

$$A \vec{\zeta}^{(e)} = 0 \text{ в } \Omega^{(e)}, \quad T(\partial_y, n) \vec{\zeta}^{(e)} = 0 \text{ на } \partial\Omega \setminus p_f,$$

имеющее асимптотику

$$\vec{z}(e) \sim \vec{e}_{\rho} e^{-\lambda_l} \left\{ -\frac{\lambda_l - 1}{x + \lambda_l} \frac{\cos(\lambda_l + 1)\alpha}{\cos(\lambda_l - 1)\alpha} \cos(\lambda_l - 1)\theta + \cos(\lambda_l + 1)\theta \right\} + \\ + \vec{e}_{\theta} e^{-\lambda_l} \left\{ -\frac{\lambda_l - 1}{x + \lambda_l} \frac{\cos(\lambda_l + 1)\alpha}{\cos(\lambda_l - 1)\alpha} \sin(\lambda_l - 1)\theta - \frac{1}{\nu_1} \sin(\lambda_l + 1)\theta \right\}.$$

В (11) и (21) k_2 и k_1 константы, зависящие от упругих постоянных и величины угла области.

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Ս. Ս. ԶԱՐԳԱՐՅԱՆ

Առաձգականության տեսության հարթ խնդրի սինգուլյար ինտեգրալ հավասարումների համակարգի լուծման եզակիությունների որոշումը եզրում տված լարումների դեպքում

Առաձգականության տեսության հարթ խնդրի լուծման համար դիտարկվում է լամբի հավասարումներից ստացված սինգուլյար ինտեգրալ հավասարումների համակարգը անկյուններ ունեցող արտաքին տիրույթի դեպքում:

Դիտարկվող համակարգի լուծումը կառուցելու համար անհրաժեշտ է իմանալ նրանց վարքագիծը եզրի անկյունային կետերի շրջակայքում⁽²⁾: Հոդվածը նվիրված է նշված համակարգի եզակիությունների որոշմանը:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ С. С. Заргарян, ДАН АрмССР, т. 77, № 1 (1983). ² С. С. Заргарян, Изв. АН СССР. МТТ, № 3, 1982. ³ С. С. Заргарян, В. Г. Мазья, Вестн. ЛГУ им. А. А. Жданова, № 1, 1983. ⁴ В. Д. Купрадзе, Т. Г. Гегелиа, М. О. Башелейшвили и др., Трехмерные задачи математической теории упругости и термоупругости, Наука, М., 1976. ⁵ Н. С. Кахниашвили, Тр. Тбил. ун-та, т. 50, 1953. ⁶ В. Г. Мазья, Тез. докл. школы-семинара «Теория упругости и вязкоупругости» в Цахкадзоре, Изд. АН АрмССР, Ереван, 1982. ⁷ В. Г. Мазья, Б. А. Пламеневский, Math. Nachr., вып. 76 (1977).