ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
LXXVII 1983 4

УДК 517.946

МАТЕМАТИКА

Н. Е. Товмасян, Л. А. Агасян

Решение смешанной задачи для уравнения Лапласа методом последовательных приближений в многосвязных неограниченных областях

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. А. Александряном 29/XII 1982)

1. *Постановка задачи и некоторые вспомогательные леммы.* В работе дается эффективный метод решения смешанной задачи для уравнения Лапласа в бесконечных многосвязных областях.

Пусть D бесконечная область, ограниченная сферами $S_1, S_2, \ldots, S_n$, и эти сферы не имеют общих точек. Обозначим их центры через $P_1, \ldots, P_n$, а радиусы через $r_1, \ldots, r_n$.

Смешанная задача. Найти в области D решение $u(P)$ уравнения Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0, \tag{1}$$

стремящееся к нулю при $P\to\infty$ и удовлетворяющее граничным условиям:

$$u(P)=f_j(P), \quad p\in S_j, \quad i=1, \ldots, m, \tag{2}$$

$$\frac{\partial u(P)}{\partial N}=f_j(P), \quad P\in S_j \quad j=m+1, \ldots, n, \tag{3}$$

где $f_j(P)$—заданные непрерывные функции в S_j, а N—внутренняя нормаль к границе S_j в точке $P\in S_j$.

Известно, что смешанная задача (1)—(3) сводится к решению сингулярных интегральных уравнений ([1,2]).

В настоящей работе поставленная задача приводится к решению уравнения Фредгольма второго рода с бесконечно дифференцируемым ядром и указываются условия на расположение сфер, при которых полученное уравнение можно решить методом последовательных приближений. Обозначим через r_{PQ} расстояние между точками P и Q. Справедливы следующие леммы.

Лемма 1. *Если функция $u(P)$ гармонична в шаре с радиусом r_0 и центром P_0 и удовлетворяет оценке*

$$u(P)\leqslant v(P) \quad \text{при} \quad r_{PP_0}\leqslant r_0, \tag{4}$$

где $v(P)$ гармонична в том же шаре, то

$$|\mathrm{grad}\, u(P)|_{P=P_0}\leqslant \frac{3v(P_0)}{r_0}. \tag{5}$$

Лемма 2. *Если* $u(P)$ *гармонична вне шара с центром* P_0 *и радиусом* r_0 *и* $u(\infty)=0$, *то*

$$|\operatorname{grad} u(P)| \leqslant \frac{3r_0}{r_{PP_0}(r_{PP_0}-r_0)} \cdot \max_{Q\in S}|u(Q)|. \tag{6}$$

Пусть S и σ—сферические поверхности с центрами $P_0(x_0, y_0, z_0)$ и $Q_0(\xi_0, \eta_0, \zeta_0)$ и радиусами r_0 и R_0, а D и G—бесконечные области, ограниченные сферами S и σ соответственно.

В области D и G соответственно рассмотрим внешние задачи Дирихле и Неймана для уравнения Лапласа:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}=0, \quad P\in D, \tag{7}$$

$$v(\infty)=0, \quad v(P)=f(P), \quad P\in S, \tag{8}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0, \quad P\in G, \tag{9}$$

$$u(\infty)=0, \quad \frac{\partial u(P)}{\partial N}=g(P). \quad P\in\sigma. \tag{10}$$

Как известно, решение задачи (7)—(8) определяется формулой Пуассона ([2])

$$v(P)=\frac{1}{4\pi r}\iint\limits_S \frac{r^2_{PP_0}-r^2_0}{r^3_{PQ}} \cdot f(Q)\,dS_Q, \quad P\in D. \tag{11}$$

Лемма 3. *Решение задачи* (9)—(10) *дается формулой*

$$u(P)=u_0(P-P_0), \tag{12}$$

где

$$u_0(P)=-\int\limits_1^\infty \frac{R_0 v(tx, ty, tz)}{t}\,dt \text{ при } r_{0P}>R_0, \tag{13}$$

0—*начало координат,* $v(P)$—*решение задачи* (7)—(8) *при* $r_0=R_0$ $f(P)=g(P+Q_0)$, $P_0=0$.

Если $P=P(x, y, z)$, $P_0=P_0(x_0, y_0, z_0)$, $Q_0=Q_0(\xi_0, \eta_0, \zeta_0)$, то через $P-P_0$ и $P+Q_0$ обозначим точки с координатами $(x-x_0, y-y_0, z-z_0)$ и $(x+\xi_0, y+\eta_0, z+\zeta_0)$.

Лемма 4. *Решения* $v(P)$ *и* $u(P)$ *задач* (7)—(8) *и* (9)—(10) *соответственно удовлетворяют оценкам*

$$v(P)\leqslant \frac{r_0}{r_{PP_0}}\|f\|, \quad P\in D, \tag{14}$$

$$|\operatorname{grad} v(P)|\leqslant \frac{3r_0}{r_{PP_0}(r_{PP_0}-r_0)} \cdot \|f\|, \quad P\in D, \tag{15}$$

$$\|u(P)\,|\leqslant \frac{R_0^2}{r_{PQ_0}}\|g\|, \quad P\in G, \tag{16}$$

$$|\mathrm{grad}\, u(P)| \leqslant \frac{3R_0^2}{r_{PQ_0}(r_{PQ_0}-r_0)} \cdot \|g\|, \quad P \in G, \tag{17}$$

где $\|f\|$ *и* $\|g\|$*—норма функций* $f(P)$ *и* $g(P)$ *в пространстве* C:

$$\|f\| = \max_{P\in S} |f(P)|, \quad \|g\| = \max_{P \in \sigma} |g(P)|. \tag{18}$$

2. *Исследование задачи* (1)—(3). Обозначим через $D_1, \ldots, D_n$—внешность шаров, ограниченных сферами $S_1, \ldots, S_n$ соответственно. Как известно [2], гармоническая в области D функция представляется в виде

$$u(P) = \sum_{k=1}^{n} u_k(P), \tag{19}$$

где $u_k(P)$—гармоническая функция в области D_k, $u_k(\infty)=0$.

Подставляя представление (19) в граничные условия (2) и (3), получим:

$$\sum_{k=1}^{n} u_k(P) = f_j(P), \quad P \in S_j, \quad j=1, \ldots, m, \tag{20}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial u_k(P)}{\partial N} = f_j(P), \quad P \in S_j, \quad j=m+1, \ldots, n. \tag{21}$$

Обозначим

$$u_k(P) = g_k(P), \quad P \in S_k, \quad k=1, \ldots, m, \tag{22}$$

$$\frac{\partial u_k(P)}{\partial N} = g_k(P), \quad P \in S_k, \quad k=m+1, \ldots, n. \tag{23}$$

Согласно формулам (11) и (13) гармонические функции $u_k(P)$ определяются через $g_k(P)$ формулами

$$u_k(P) = \frac{1}{4\pi r_k} \iint_{S_k} g_k(Q) \frac{r_{PP_k}^2 - r_k^2}{r_{PQ}^3} dS_Q, \; P \in D_k, \; k=1, \ldots, m, \tag{24}$$

$$u_k(P) = -\int_1^{\infty} \frac{r_k v_k(t(x-x_k),\, t(y-y_k),\, t(z-z_k))}{t} dt, \; P \in D_k, \; k=m+1, \ldots, n; \tag{25}$$

где

$$v_k(P) = \frac{1}{4\pi r_k} \iint_{\sigma_k} \frac{r_{P0}^2 - r_k^2}{r_{PQ}^3} \cdot g_k(Q+P_k) dS_Q, \quad P \in G_k, \quad k=m+1, \ldots, n, \tag{26}$$

σ_k—сфера с центром 0 и радиуса r_k, G_k—бесконечная область, ограниченная σ_k.

Пусть $g_k(P)$ функция на $S = S_1 \cup \ldots \cup S_n$, совпадающая в S_k с функцией $g_k(P)$ и $\|g\| = \max_{P\in S} |g(P)|$. При обозначениях (22)—(23) граничные условия (20)—(21) можно записать в виде

$$g(P) + \sum_{j=1}^{n} u_j(P) = f_k(P), \quad P \in S_k, \quad k=1, \ldots, m, \tag{27}$$

$$g(P)+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n}\frac{\partial u_j(P)}{\partial N}=f_k(P),\quad P\in S_k,\ k=m+1,\ldots,n, \tag{28}$$

где $u_j(P)$ определяются формулами (24) при $j=1,\ldots,m$ и формулами (25) при $j=m+1,\ldots,n$.

Обозначим через $K(g)$ оператор, который каждой непрерывной на S функции $g(P)$ сопоставляет непрерывную в S функцию $\Phi(P)$ по формуле

$$K(g)\equiv\Phi(P)=-\sum_{\substack{k=1\\ k\neq j}}^{n}u_k(P)\quad \text{при}\quad P\in S_j\ j=1,\ldots,m, \tag{29}$$

$$K(g)\equiv\Phi(P)=-\sum_{\substack{k=1\\ k\neq j}}^{n}\frac{\partial u_k(P)}{\partial N}\quad \text{при } P\in S_j,\quad j=m+1,\ldots,n. \tag{30}$$

При этих обозначениях уравнения (27)—(28) можно записать в виде

$$g(P)=K(g)+f(P),\quad P\in S, \tag{31}$$

где $f(P)=f_k(P)$ при $P\in S_k$, $k=1,\ldots,n$.

Используя леммы 1—4, получим следующие оценки:

$$|\Phi(P)|\leqslant\beta_j\|g\|\ P\in S_j,\ (j=1,\ldots,n) \tag{32}$$

где

$$\beta_j=\sum_{\substack{k=1\\ k\neq j}}^{m}\frac{r_k}{r_{P_jP_k}-r_j}+\sum_{k=m+1}^{n}\frac{r_k^2}{r_{P_jP_k}-r_j},\quad j=1,\ldots,m, \tag{34}$$

$$\beta_j=\sum_{\substack{k=1\\ k\neq 1}}^{m}\frac{3r_k}{(r_{P_jP_k}-r_j)(r_{P_jP_k}-r_k-r_j)}+\sum_{\substack{k=m+1\\ k\neq j}}^{n}\frac{3r_k^2}{(r_{P_jP_k}-r_j)(r_{P_jP_k}-r_k-r_j)}, \tag{34}$$

$$j=m+1,\ldots,n.$$

Следовательно,

$$|K(g)|\leqslant\max(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n)\cdot\|g\|,\ \|K\|\leqslant\max(\beta_1,\ldots,\beta_n) \tag{35}$$

Уравнение (31) является интегральным уравнением с бесконечно дифференцируемым ядром на S.

Если $\beta_k<1$, $k=1,2,\ldots,n$, то норма оператора K меньше единицы, и следовательно, в этом случае метод последовательных приближений применим к решению интегрального уравнения (31). Решение уравнения (31) пишется в виде ряда $g(P)=\sum_{n=0}^{\infty}K^{(n)}(f)$, где $K^{(n)}$—n-тая итерация оператора K.

Ясно, что если расстояние между центрами сфер $S_1,\ldots,S_n$ по сравнению с радиусами достаточно большое, то норма оператора K всегда меньше 1.

Ереванский политехнический
им. К. Маркса

Ն. Ե. ԹՈՎՄԱՍՅԱՆ, Լ. Ա. ԱՂԱՍՅԱՆ

Լապլասի հավասարման համար անվերջ բազմակապ տիրույթներում խառը խնդրի լուծումը հաջորդական մոտավորությունների մեթոդով

Դիցուք D-ն անվերջ տիրույթ է, որը սահմանափակված է $S_1, \ldots, S_n$ գնդային մակերևույթներով, ընդ որում այդ մակերևույթները ընդհանուր կետեր չունեն։ Քննարկված է հետևյալ խնդիրը։ Գտնել D տիրույթում Լապլասի հավասարման $u(P)$ լուծումը, որը բավարարում է հետևյալ պայմաններին՝

$$u(\infty)=0$$

$$u(P)=f_j(P), \quad P\in S_j, \quad j=1, \ldots, m.$$

$$\frac{\partial u}{\partial N}=f_j(P), \quad P\in S_j, \quad j=m+1, \ldots, n,$$

որտեղ $f_j(P)$, S_j վրա տրված անընդհատ ֆունկցիաներ են, իսկ N-ը $P\in S_j$ կետում արտաքին նորմալն է։

Ներկա աշխատանքում այս խնդիրը բերվում է Ֆրեդհոլմի երկրորդ սեռի հավասարման, որի կորիզը անվերջ դիֆերենցելի է։ Նշված են պայմաններ այդ գնդային մակերևույթների դասավորության համար, որոնց դեպքում ստացված հավասարումը կարելի է լուծել հաջորդական մոտավորությունների եղանակով։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *А. В. Бицадзе,* Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка, Наука, М., 1966. [2] *А. Н. Тихонов, А. А. Самарский,* Уравнения математической физики, Наука, М., 1977. [3] *Л. А. Люстерник, В. И. Соболев,* Элементы функционального анализа, Госиздат, М.-Л., 1951.