ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXVII 1983 4

УДК 517.948

МАТЕМАТИКА

Л. З. Геворкян

Критерий субнормальности операторов и степенная проблема моментов

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. А. Александряном 25/XI 1982)

Степенная проблема моментов (см. напр. ([1])) состоит в следующем. Какому условию должна удовлетворять данная матрица $\mathcal{A}=\{\alpha_{ik}\}_{i,k=0}^{\infty}$, чтобы существовала неотрицательная мера μ, определенная на всех борелевских подмножествах комплексной плоскости $\boldsymbol{C}$, такая, что

$$\alpha_{ik}=\int\limits_{C} z^i\bar{z}^k d\mu. \tag{1}$$

В дальнейшем нас будет интересовать случай, когда мера μ имеет компактный носитель, причем мы не будем рассматривать тривиальный (по существу лишь алгебраический) случай, когда мера сосредоточена в конечном числе точек.

Определим полуторалинейную форму на множестве всех полиномов $\boldsymbol{P}$ от одной переменной по формуле

$$(P, Q)=\sum_{m=0}^{N_1}\sum_{n=0}^{N_2}\alpha_{mn}a_m\bar{b}_n, \quad P(z)=\sum_{m=0}^{N_1}a_m z^m, \quad Q(z)=\sum_{n=0}^{N_2}b_n z^n. \tag{2}$$

Теорема. *Необходимым и достаточным условием разрешимости упомянутой выше проблемы моментов (1) является одновременное выполнение следующих условий:*

i) матрица

$$\mathcal{A}_N=\begin{pmatrix}\alpha_{00} & \cdots & \alpha_{0N}\\ \vdots & & \vdots\\ \alpha_{N0} & \cdots & \alpha_{NN}\end{pmatrix}$$

при любом $N\in \boldsymbol{Z}^+$ положительно определена;

ii) существует константа $c>0$ такая, что

$$\sum_{m,n=0}^{N}\alpha_{m+1\,n+1}\,\xi_m\bar{\xi}_n\leqslant c\sum_{m,n=0}^{N}\alpha_{mn}\xi_m\bar{\xi}_n$$

для любого вектора $\xi=(\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_N)$ и любого $N\in\boldsymbol{Z}^+$;

iii) для любого набора полиномов $P_0, P_1, \ldots, P_N$ и любого $N\in\boldsymbol{Z}^+$

$$\sum_{m,n=0}^{N}(z^m P_n(z), z^n P_m(z))\geqslant 0.$$

Достаточность. Легко проверить, что полуторалинейная форма (2) при выполнении условия i является скалярным произведением на множестве $\boldsymbol{P}$. Обозначим через H пополнение предгильбертова пространства $\boldsymbol{P}$ по этому скалярному произведению. Пусть A оператор умножения на независимую переменную z в $\boldsymbol{P}$. В силу условия ii этот оператор ограничен. Распространим этот оператор по непрерывности на все H и полученный оператор снова обозначим через A. Покажем, что оператор A субнормален. Для этого нам понадобится следующее уточнение хорошо известного критерия субнормальности операторов Халмоша—Брама ([2]), а именно

Лемма. *Для субнормальности произвольного оператора A в абстрактном гильбертовом пространстве H необходимо и достаточно выполнение неравенства*

$$\sum_{m,n=0}^{N}(A^m f_n,\ A^n f_m)\geqslant 0$$

для любого конечного набора элементов $f_0, f_1, \ldots, f_N$ из некоторого множества M, которое всюду плотно в H.

Напомним, что критерий Халмоша—Брама ([2]) заключается в выполнении этого же неравенства, однако для любого конечного набора элементов из всего H.

Доказательство леммы. Сначала покажем, что форма

$$\varphi(f_0, f_1, \ldots, f_N)=\sum_{m,n=0}^{N}(A^m f_n,\ A^n f_m)$$

непрерывна по каждому из своих аргументов. В самом деле, если зафиксировать число s, то

$$\varphi(f_0, f_1, \ldots, f_N)-\varphi(f_0, f_1, \ldots, f_{s-1}, g, f_s, \ldots, f_N)=$$

$$=\sum_{\substack{m=0\\ m\neq s}}^{N}(A^m(f_s-g),\ A^s f_m)+\sum_{\substack{n=0\\ n\neq s}}^{N}(A^s f_n,\ A^n(f_s-g))+\|A^s f_s\|^2-\|A^s g\|^2.$$

Так как форма φ неотрицательна на M, то, повторяя достаточное число раз операцию предельного перехода, мы докажем неотрицательность φ на всем H, что и означает справедливость леммы.

Таким образом, в силу условия iii теоремы построенный нами оператор A субнормален. Обозначим через B минимальное нормальное расширение оператора A, которое, как известно, определяется единственным образом (с точностью до унитарного оператора). Можно доказать, что элемент $P_0(z)\equiv 1$ является циклическим вектором оператора B, поэтому в силу основной спектральной теоремы оператор B является оператором умножения на независимую переменную z в некотором пространстве L^2_μ.

Приведем примеры, показывающие независимость условий i—iii. Оказывается, что соответствующие примеры можно найти уже в классе диагональных матриц.

Прежде всего ясно, что из условий ii и iii не следует условие i (для этого достаточно взять нулевую матрицу).

Пример 1. Пусть $\alpha_{ik}=\delta_{ik}k!$ Легко видеть, что условие ii в этом случае нарушается, поскольку при $\xi=(0, 0, \ldots, 0, 1)$ будем иметь

$$\sum_{m,n=0}^{N}\xi_m\bar{\xi}_n\alpha_{m+1\,n+1}=(N+1)!,\qquad \sum_{m,n=0}^{N}\xi_m\bar{\xi}_n\alpha_{mn}=N!$$

Прямыми вычислениями можно убедиться, что рассматриваемая нами матрица представима в виде

$$\alpha_{mn}=\frac{i}{2\pi}\int\limits_{C} z^m\bar{z}^n e^{-|z|^2}dz\wedge d\bar{z}. \tag{3}$$

Уместно упомянуть, что пространство L^2_μ, где $d\mu=\dfrac{i}{2\pi}e^{-|z|^2}dz\wedge d\bar{z}$, есть известное пространство Фишера (см. ([3]) и приведенную там библиографию).

Возвращаясь к проверке условия iii и принимая во внимание представление (3), будем иметь

$$\sum_{m,n=0}^{N}(z^mP_n(z),\, z^nP_m(z))=\frac{i}{2\pi}\sum_{m,n=0}^{N}\int\limits_{C} z^mP_n(z)\overline{z^nP_m(z)}e^{-|z|^2}dz\wedge d\bar{z}=$$

$$=\frac{i}{2\pi}\sum_{m,n=0}^{N}\int\limits_{C}\bar{z}^nP_n(z)\overline{\bar{z}^mP_m(z)}e^{-|z|^2}dz\wedge d\bar{z}=\frac{i}{2\pi}\int\limits_{C}\left|\sum_{n=0}^{N}\bar{z}^nP_n(z)\right|^2e^{-|z|^2}dz\wedge d\bar{z}\geqslant 0,$$

т. е. условие iii выполняется.

Пример 2. Пусть $\alpha_{ik}=\delta_{ik}(k+1)^2$. Тогда норма оператора A умножения на z оказывается равной двум и поэтому

$$\sum_{m=0}^{N}|\xi_m|^2(m+2)^2\leqslant 4\sum_{m=0}^{N}|\xi_m|^2(m+1)^2,$$

т. е. выполнено условие ii.

Если в условие iii подставить пару $P_0(z)\equiv 1$ и $P_1(z)=-z/2$, то непосредственный подсчет показывает, что это выражение отрицательно, т. е. условие iii не выполняется.

Отметим, что пространство, порожденное именно этой матрицей, и оператор A подробно изучены в ряде работ ([4–6]).

Необходимость. Пусть существует неотрицательная мера μ с компактным носителем такая, что выполняется (1). Тогда легко видеть, что матрицы $\mathcal{A}_N$ положительно определены. Так как мера μ имеет компактный носитель, то оператор A умножения на независимую переменную в пространстве L^2_μ ограничен, откуда можно заключить, что выполняется условие ii. Что же касается условия iii, то оно непосредственно следует из нормальности оператора A.

В заключение заметим, что в случае разрешимости проблемы моментов (1) мера μ определяется единственным образом. В самом деле, если

$$\int z^m\bar{z}^n d\mu=\int z^m\bar{z}^n d\nu,$$

то

$$\int P(z, \bar{z})d\mu = \int P(z, \bar{z})d\nu$$

для любого полинома от двух переменных. Так как множество всех таких полиномов плотно как в L^2_μ, так и в L^2_ν, то для любого ограниченного борелевского множества T

$$\mu(T) = \int \chi_T d\mu = \int \chi_T d\nu = \nu(T).$$

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Լ. Զ. ԳԵՎՈՐԳՅԱՆ

Օպերատորների սուբնորմալության հայտանիշը եվ մոմենտների աստիճանային պրոբլեմը

Ցույց է տրված, որ եթե $A = \{\alpha_{ik}\}_{i,k=0}^{\infty}$ *մատրիցան բավարարում է հետևյալ պայմաններին*

i)

$$A_N = \begin{pmatrix} \alpha_{00} & \cdots & \alpha_{0N} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{N0} & \cdots & \alpha_{NN} \end{pmatrix}$$

մատրիցան ցանկացած դրական ամբողջ N*-ի համար դրական որոշված է,*

ii) գոյություն ունի $c > 0$ *հաստատուն, այնպես որ*

$$\sum_{m,n=0}^{N} \alpha_{m+1\, n+1} \xi_m \bar{\xi}_n \leqslant c \sum_{m,n=0}^{N} \alpha_{mn} \xi_m \bar{\xi}_n$$

ցանկացած $\xi = (\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_N)$ *վեկտորի համար,*

iii) բազմանդամների ցանկացած վերջավոր $P_0, P_1, \ldots, P_N$ *հավաքածուի համար տեղի ունի հետևյալ անհավասարությունը*

$$\sum_{m,n=0}^{N} (z^m P_n(z),\ z^n P_m(z)) \geqslant 0,$$

ապա՝ գոյություն ունի կոմպակտ կրիչով դրական չափ μ, *որոշված կոմպլեքս հարթության բոլոր բորելյան բազմությունների համար, այնպես որ*

$$\alpha_{ik} = \int z^i \bar{z}^k d\mu:$$

Այդ չափը որոշվում է միակ ձևով:

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Н. И. Ахиезер,* Классическая проблема моментов, Наука, М., 1961. [2] *П. Халмош,* Гильбертово пространство в задачах, Мир, М., 1970. [3] *A. Shields*, Math. Surveys, vol. 13, Topics in operator theory, 2 nd edition, Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island, 1979. [4] *A. Lambert,* Proc. Amer. Math. Soc., 29, 331—336 (1971). [5] *Б. И. Коренблюм,* Мат. сб., т. 89 (1972). [6] *Л. З. Геворкян,* Автореф. канд. дис. Ереван, 1982.