ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXVII 1983 4

УДК 51 : 621.391

МАТЕМАТИКА

А. А. Мартиросян

О влиянии согласованности гипотез с исходной информацией на сложность индуктивного вывода

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. Р. Варшамовым 24/XI 1982)

I. В рамках модели индуктивного обобщения, предложенной в ([1]), продолжается сравнительное изучение двух классов индукторов—алгоритмов индуктивного обобщения. Определяющим признаком принадлежности индукторов к первому классу является согласованность исходной информации, которую перерабатывает индуктор, с гипотезой, являющейся результатом этой переработки. Индукторы этого класса называются согласующими. Второй класс определяется как дополнение к первому.

На множестве всех „понятий“ T, представленных в модели парами непересекающихся множеств (ПМ), задается отношение толерантности τ, призванное эксплицировать отношение „большинство элементов понятий u и v совпадают“. Считается, что индуктор f расшифровал понятие v, если существует такая информация x, что гипотеза $f(x)$, выданная на основе x, будет толерантна v. Вводится понятие объемной сложности $S(U, G)$ множества понятий U относительно класса индукторов G и по ней производится сравнение согласующих и несогласующих индукторов.

Рассматриваются две ситуации. Если мы не накладываем никаких ограничений на информацию x, на основе которой индуктор f выдал гипотезу $f(x)$, интересуясь только количеством этой информации $|x|$, то выявляется в целом преимущество несогласующих индукторов (теоремы 1, 2), причем это преимущество существенно. Если же от информации x требовать еще и согласованности ее с понятием v, то положение меняется. Доказывается, что несогласующие индукторы теряют свои преимущества, хотя в подавляющем большинстве случаев срабатывают не хуже согласующих (теорема 3). Теоремы 1—3 являются обобщением на случай толерантностей более общего вида соответствующих теорем из ([2]). Теорема 4 дает характеризацию класса рассматриваемых толерантностей в терминах теоретико-множественных операций.

Обозначения и определения, введенные в ([1–3]), не повторяются.

II. Пусть с каждым подмножеством A множества M (см. ([1])) ассоциировано мажоритарное пространство $\mathcal{M}(A)$ (см. ([3])), удовлетворяющее условиям:

(M1) $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3$ $(\subseteq M)$ и $A_1 \in L(A_2)$ влечет $A_1 \in L(A_3)$;

(M2) $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3$ $(\subseteq M)$ и $A_1 \in \mathcal{M}(A_3)$ влечет $A_1 \in \mathcal{M}(A_2)$.

(Здесь $L(A)$—система меньшинств в A (1)).

Нетрудно убедиться, что (M1) и (M2) эквивалентны соответственно:

(M1′) $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 (\subseteq M)$ и $A_1 \in \mathcal{M}(A_2)$ влечет $A_1 \cup (A_3 \setminus A_2) \in \mathcal{M}(A_3)$;

(M2′) $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3$ $(\subseteq M)$ и $A_2 \in L(A_3)$ влечет $A_2 \setminus A_1 \in L(A_3 \setminus A_1)$.

По определению будем полагать $\mathcal{M}(\varnothing) = \{\varnothing\}$.

Посредством системы пространств $\{\mathcal{M}(A)/A \subseteq M\}$ на T можно задавать отношение толерантности τ, определяемое следующим образом:

(M3) $x \tau y \Leftrightarrow \nu(x \triangledown y) \in L(\nu(x) \cup \nu(y))$

или, что эквивалентно,

(M3′) $x \tau y \Leftrightarrow \nu(x \cdot y) \in \mathcal{M}(\nu(x) \cup \nu(y))$,

где $x \cdot y$ обозначает ПМ $(\nu_1(x) \cap \nu_1(y),\ \nu_0(x) \cap \nu_0(y))$.

Будем говорить, что индуктор f *расшифровывает* множество $U(\subseteq T)$, если для каждого $u \in U$ найдется $x \in T$ такое, что $u \tau f(x)$.

Пусть $U \subseteq T$ и $G \subseteq F$. Если в G содержится индуктор, расшифровывающий U, то *объемной сложностью множества* U *относительно* G назовем число

$$S(U, G) = \min_{f \in G} \{\max_{u \in U} \{\min_{\substack{f(x) \tau u \\ x \in T}} \{|\nu(x)|\}\}\}.$$

Если же такого индуктора нет, то полагаем $S(U, G) = k+1$. Связанную с $S(U, G)$ величину $S_{\text{ср}}(U, G)$

$$S_{\text{ср}}(U, G) = \min_{f \in G} \left\{\frac{1}{|U|} \cdot \sum_{u \in U} S(\{u\}, \{f\})\right\}$$

назовем *средней объемной сложностью*.

Индуктор f оптимален для $U \subseteq T$ в $G \subseteq F$ по сложности S (или $S_{\text{ср}}$), если $f \in G$ и $S(U, \{f\}) = S(U, G)$ (соответственно, $S_{\text{ср}}(U, \{f\}) = S_{\text{ср}}(U, G)$).

Мажоритарное пространство $\mathcal{M}(A)$ назовем вырожденным, если $\mathcal{M}(A) = \{A\}$.

Теорема 1. *Если пространство* $\mathcal{M}(M)$ *не вырождено, то для любого* $U \subseteq T$ *выполнены неравенства*

$$S(U, F_{\text{нс}}) \leqslant S(U, F_{\text{с}}) \quad \text{и} \quad S_{\text{ср}}(U, F_{\text{нс}}) \leqslant S_{\text{ср}}(U, F_{\text{с}}),$$

т. е. в классе несогласующих индукторов всегда найдется оптимальный в F.

В случае, если $\mathcal{M}(M)$ вырождено, то по (M1) вырождены и все $\mathcal{M}(A)$, где $A \subseteq M$, а τ превращается в равенство. Этот случай был подробно рассмотрен в (2).

Следующее утверждение дополняет теорему 1.

Теорема 2. *Пусть выполнено условие*

$$\forall a, b_{\in M} \exists c_{\in M}[\{a\} \in \mathcal{M}(\{a, b\}) \rightarrow (\{a\} \in \mathcal{M}(\{a, c\}) \& \{a\} \notin \mathcal{M}(\{a, b, c\}))].$$

Тогда найдется такое $U_0 \subseteq T$, *что*

$$S(U_0, F_{\text{нс}}) < S(U_0, F_{\text{с}}) \quad \text{и} \quad S_{\text{ср}}(U_0, F_{\text{нс}}) < S_{\text{ср}}(U_0, F_{\text{с}}).$$

III. Наложим теперь более жесткие ограничения на те ПМ, посредством которых индуктор расшифровывает некоторое понятие. Именно, в добавление к условию $f(x)\tau v$ будем требовать также согласованности x с v, что определяет уже новую сложность S':

$$S'(U, G) = \min_{f \in G} \{\max_{u \in U} \{\min_{\substack{f(x)\tau u \\ x \subseteq v}} \{ |\nu(x)| \}\}\}.$$

При поиске аналогов теорем 1, 2 для сложности S' мы приходим к следующему утверждению.

Теорема 3.

1) $S'(U, F_{\text{с}}) \leqslant S'(U, F_{\text{нс}})$ *для произвольного* $U \subseteq T$.

2) *Если для некоторых* $a_0, b_0 (\in M)$ *выполнено* $\{a_0\} \in L(M \setminus \{b_0\})$, *то* $S'(U, F_{\text{с}}) = S'(U, F_{\text{нс}})$ *для любого* $U \subseteq T$.

IV. Отношение $\subseteq$ покомпонентного включения ПМ превращает T в частично-упорядоченное множество, причем для произвольных двух элементов T всегда существует точная нижняя грань, тогда как точная верхняя грань может и не существовать.

Если $x, y, z \in T$ и $z \subseteq x$, то будем полагать по определению:

$$x + y = (\nu_1(x) \cup \nu_1(y), \quad \nu_0(x) \cup \nu_0(y)) \qquad (= \sup\{x, y\})$$

$$x \cdot y = (\nu_1(x) \cap \nu_1(y), \quad \nu_0(x) \cap \nu_0(y)) \qquad (= \inf\{x, y\})$$

$$x - y = (\nu_1(x) \setminus \nu_1(y), \quad \nu_0(x) \setminus \nu_0(y))$$

$$x^{-1} = (\nu_0(x), \ \nu_1(x))$$

$$x_z = (x - z) + z^{-1}.$$

Все операции, кроме $+$, являются всюду определенными. Под сегментом $[x, y]$, где $x, y \in T$, будем понимать множество $\{t_{\in T} / t \supseteq x \cdot y \& \nu(t) \subseteq \nu(x) \cup \nu(y)\}$. Оказывается, что справедлива следующая

Теорема 4. *Толерантность* τ *на* T *удовлетворяет условиям* (M1)—(M3) *тогда и только тогда, когда*

(T1) *для любых* $x, y, z (\in T)$ *таких, что* $x+z$ *и* $y+z$ *определены, из* $x\tau y$ *следует* $(x+z)\tau(y+z)$:

(T2) $x\tau y$ и $z_1, z_2 \in [x, y]$ *влечет* $z_1 \tau z_2$;

(T3) $x\tau y$ и $z \subseteq x \cdot y$ *влечет* $x_z \tau y_z$;

(T4) $x\tau y$ и $x\tau y^{-1}$ *влечет* $x = (\varnothing, \varnothing)$.

V. В заключение автор выражает благодарность Э. М. Погосяну за постановку задачи и полезные обсуждения.

Вычислительный центр
Академии наук Армянской ССР
и Ереванского государственного университета

Ա. Հ. ՄԱՐՏԻՐՈՍՅԱՆ

Նախնական ինֆորմացիայի հետ հիպոթեզների համաձայնեցվածության ազդեցությունն ինդուկտիվ արտածման բարդության վրա

Նախկինում առաջարկված ինդուկտիվ ընդհանրացման մոդելի սահմաններում շարունակվում է համաձայնեցնող և ոչ-համաձայնեցնող ալգորիթմների համեմատությունը։ «Հասկացությունների» վերծանելիության սահմանումը հիմնվում է մաժորիտար տարածության գաղափարի վրա։ Պարզվում է, որ այս սահմանման դեպքում էլ ինդուկտիվ ալգորիթմների ծավալային բարդության նախկինում ստացված համեմատական բնութագրերը մնում են գրեթե անփոփոխ։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Э. М. Погосян*, в сб. Семиотика и информатика, вып. 8 (1977). [2] *А. А. Мартиросян, Э. М. Погосян*, в сб.: Семиотика и информатика, вып. 14 (1980). [3] *Н. Я. Виленкин, Ю. А. Шрейдер*, в сб.: Семиотика и информатика, вып. 8 (1977).