

УДК 532.501.32 : 528.024.6

ГИДРАВЛИКА

А. М. Бархударян

**Колебание жидкости в трубопроводах
и в системах гидродинамических нивелиров в поле массовых сил**

(Представлено академиком АН Армянской ССР А. Г. Назаровым 1/II 1983)

В основе гидродинамического нивелирования (¹⁻³) использована закономерность изменения уровней жидкости при одномерном нестационарном движении в системах сообщающихся сосудов. В существующей теории гидродинамического нивелирования рассмотрено нестационарное движение жидкости в поле силы тяжести (³). Однако в некоторых случаях нестационарное движение проявляется также при возникновении или присутствии других видов массовых сил.

Целью настоящей работы является получение уравнения одномерного нестационарного движения капельной жидкости в поле любых массовых сил и исследование характера движения жидкости в трубах, возникающего вследствие внезапного изменения массовых сил, например, случае землетрясения.

Уравнение Эйлера для одномерного движения жидкости следующее:

$$S - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{u^2}{2} \right), \quad (1)$$

где S — проекция массовых сил по направлению движения; u — скорость; p — давление; ρ — плотность жидкости.

При наличии сил тяжести вектор массовой силы $\bar{F}$ в каждой точке жидкости представляет собой сумму единичной силы веса $\bar{g}$ и единичной силы инерции $\bar{j}$ переносного движения:

$$\bar{F} = \bar{g} + \bar{j}, \quad \bar{j} = -\bar{a};$$

где $\bar{a}$ — вектор переносного ускорения в данной точке жидкости.

Подставляя в (1) значение проекции массовой силы $S = F \cos(\hat{f}, \hat{s})$ и интегрируя вдоль линии тока, для потока реальной капельной жидкости получим уравнение неустановившегося движения

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2} = \frac{p_2}{\rho} + \frac{\alpha_2 v_2^2}{2} + \alpha_0 \int_{s_1}^{s_2} \frac{\partial v}{\partial t} ds - \int_{s_1}^{s_2} F \cos(\hat{f}, \hat{s}) ds + gh_n; \quad (2)$$

где v — средняя скорость потока; h_n — мгновенное значение потери энергии, которое обычно подсчитывается по соотношениям, полученным для установившегося движения.

В уравнении (2) выражение $gh_{\text{ин}} = \alpha_0 \int_{s_1}^{s_2} \frac{\partial v}{\partial t} ds$ есть изменение кинетической энергии жидкости, отнесенной к единице мгновенного массового расхода.

Если в векторном поле массовых сил проведем отрезок кривой, то

$$A = \int_{s_1}^{s_2} F \cos(\hat{f}, \hat{s}) ds = \int_{s_1}^{s_2} \bar{F} \cdot d\bar{r} = \int_{s_1}^{s_2} F_s ds$$

будет определять величину циркуляции вектора массовых сил по заданному контуру. Если X, Y, Z соответствующие проекции единичной массовой силы $\bar{F}$ на координатные оси, тогда

$$A = \int_{s_1}^{s_2} (Xdx + Ydy + Zdz). \quad (3)$$

В том случае, когда движение происходит в равноускоренном поле, т. е. когда массовая сила в данный момент времени во всех точках жидкой среды одинакова,

$$A = X(x_2 - x_1) + Y(y_2 - y_1) + Z(z_2 - z_1). \quad (4)$$

При принятых обозначениях уравнение неустановившегося движения для потока реальной капельной жидкости примет вид

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2} = \frac{p_2}{\rho} + \frac{\alpha_2 v_2^2}{2} + gh_n + gh_{\text{ин}} - A. \quad (5)$$

Рассмотрим следующие задачи:

1. Жидкость в изогнутой трубке (рис. 1) находилась в состоянии абсолютного покоя в поле силы тяжести. Начиная с момента $t=0$ на нее действует также поле переносного ускорения $\bar{a}$, вследствие чего жидкость выходит из состояния покоя и начинает совершать колебательное движение. Необходимо получить закономерность изменения уровней в коленях трубки.

Пусть в момент времени t вертикальное отклонение левого столба от начального положения равно δ , а правого — β , причем $\beta = \delta \sin \varphi$. Написав уравнение (5) для обоих концов жидкого столба и учитывая, что скорости и давления в этих сечениях одинаковы, будем иметь

$$g(h_n + h_{\text{ин}}) - A = 0. \quad (6)$$

Наибольший практический интерес представляет случай ламинарного движения, при котором

$$h_n = \frac{32\nu lv}{gd_0^2}, \quad (7)$$

где l — длина жидкого столба; ν — кинематический коэффициент вяз-

кости жидкости; d_0 —диаметр трубки. Средняя скорость движения жидкости в трубке $v = d\delta/dt$.

При неустановившемся движении жидкости в трубке постоянного сечения локальное ускорение $\partial v/\partial t$ в каждый рассматриваемый момент времени одинаково для всех сечений по длине потока, и поэтому инерционный напор будет:

$$h_{\text{ин}} = \frac{\alpha_0}{g} \int_{s_1}^{s_2} \frac{\partial v}{\partial t} ds = \frac{\alpha_0 l}{g} \cdot \frac{dv}{dt} = \frac{\alpha_0 l}{g} \frac{d^2 \delta}{dt^2}.$$

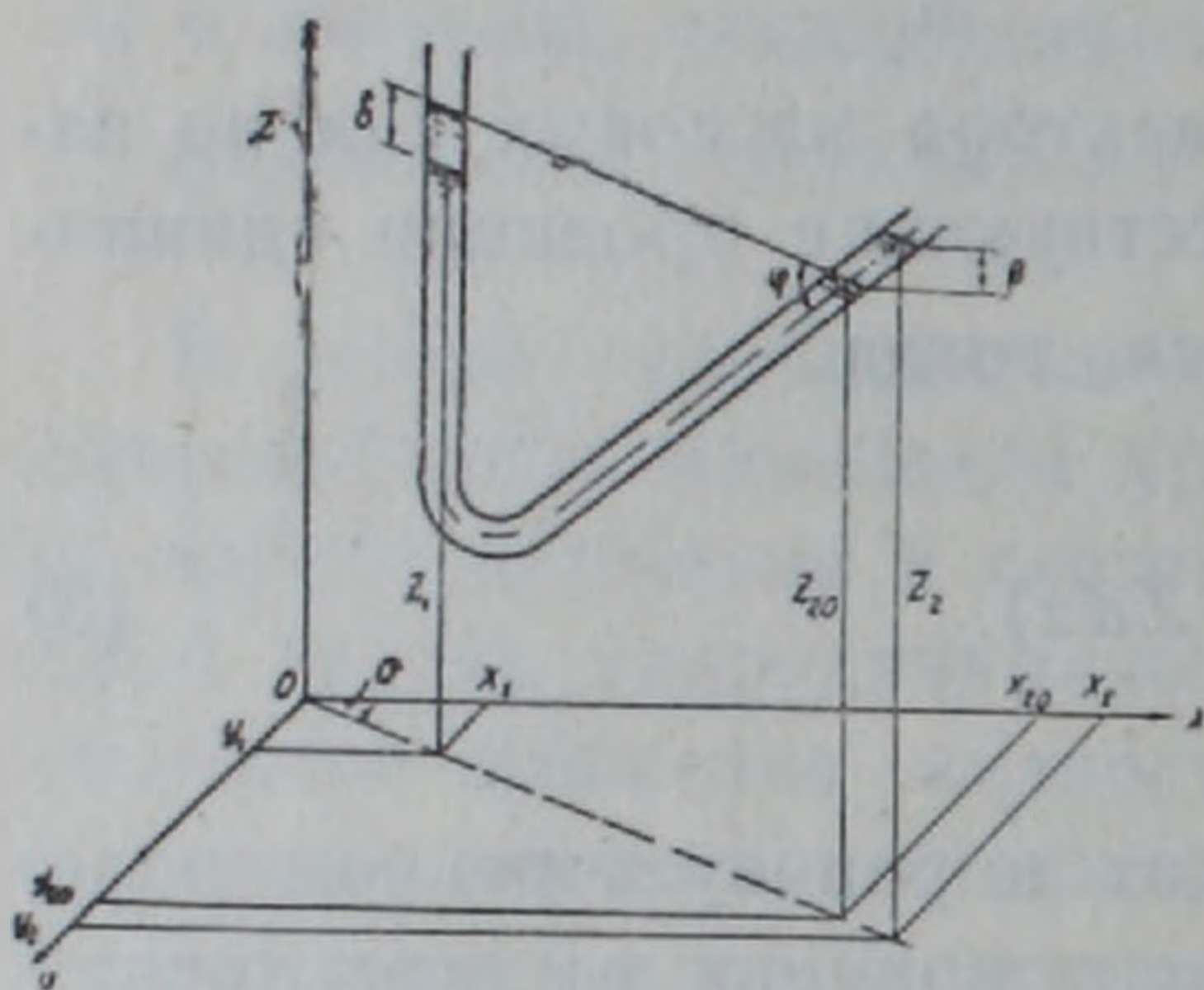


Рис. 1. Схема изогнутой трубки с жидкостью

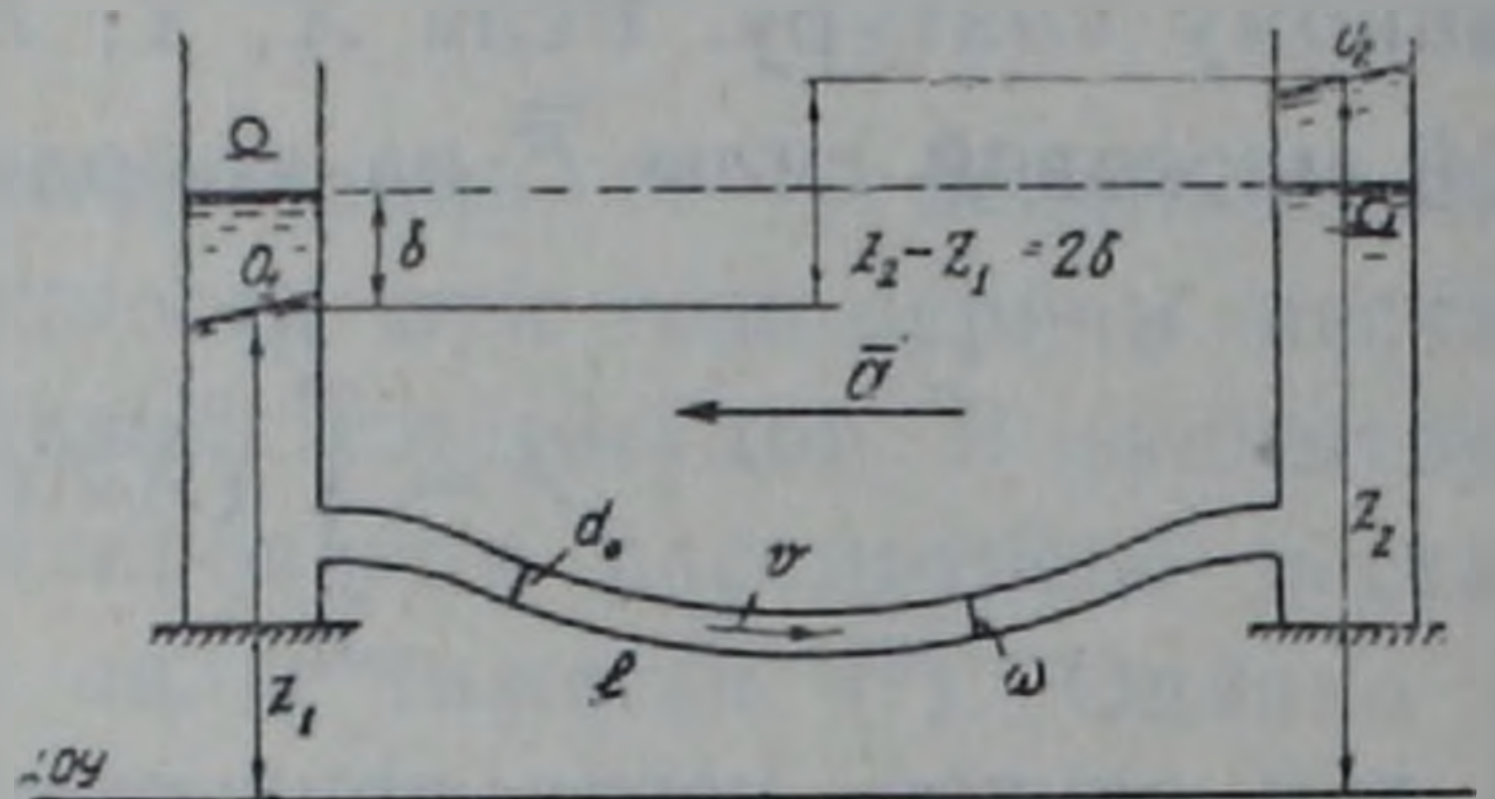


Рис. 2. Система гидродинамического нивелирования, состоящая из двух сосудов

Если обозначить $x_{20} - x_1 = x_0$, $y_{20} - y_1 = y_0$ и учесть, что

$$z_2 - z_1 = \delta(1 + \sin \varphi); \quad x_2 - x_1 = x_0 + \delta \cos \varphi \cos \nu; \quad y_2 - y_1 = y_0 + \delta \cos \varphi \sin \nu;$$

после обозначения

$$f = \frac{1}{\alpha_0 l} (X x_0 + Y y_0); \quad p = \frac{32\nu}{d_0^2 \alpha_0};$$

$$q = - \frac{z(1 + \sin \varphi) + X \cos \varphi \cos \nu + Y \cos \varphi \sin \nu}{\alpha_0 l}$$

в общем случае, когда массовая сила изменяется со временем, из (6) получим

$$\frac{d^2 \delta}{dt^2} + p \frac{d\delta}{dt} + q(t)\delta = f(t) \quad (8)$$

линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка.

При рассмотрении колебания жидкости в стационарном поле массовой силы, обозначив $\eta = \delta - f/q$, получим следующее однородное линейное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами:

$$\eta'' + p\eta' + q\eta = 0, \quad (9)$$

а. Общее решение уравнения (9) при больших сопротивлениях, т. е. при $p^2 - 4q > 0$,

$$\eta = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t},$$

где

$$r_1 = -\frac{p}{2} + \lambda; \quad r_2 = -\frac{p}{2} - \lambda; \quad \lambda = \sqrt{\left|\frac{p^2}{4} - q\right|}.$$

Постоянные интегрирования определяются из начальных условий при $t=0$, $\delta=0$, $v=d\delta/dt=0$:

$$C_1 = -\frac{2\lambda+p}{4\lambda} \frac{f}{q}; \quad C_2 = \frac{p-2\lambda}{4\lambda} \cdot \frac{f}{q}.$$

При больших сопротивлениях движение жидкости в трубе не носит колебательного характера и

$$\delta = \frac{f}{q} + C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}. \quad (10)$$

б. При меньших сопротивлениях, т. е. при $p^2 - 4q < 0$,

$$\delta = \frac{f}{q} \left[1 + e^{-\frac{p}{2}t} \left(\cos \lambda t + \frac{p}{2} \sin \lambda t \right) \right]. \quad (11)$$

При этом движение жидкости является колебательным.

в. При $4q - p^2 = 0$

$$\delta = \frac{f}{q} \left[1 - e^{-\frac{p}{2}t} \left(1 + \frac{p}{2}t \right) \right]. \quad (12)$$

2. Предположим, что два сосуда соединены трубой постоянного диаметра (рис. 2). Жидкость в системе находилась в равновесии до момента времени $t=0$. Вследствие внешних явлений возникло переносное ускорение $\bar{a}$. В системе нарушилось равновесие жидкости и создалось колебательное движение. Исследуем закономерность изменения уровня жидкости в сосудах.

Пусть центры тяжести свободных поверхностей при колебании будут $O_1(x_1, y_1, z_1)$ и $O_2(x_2, y_2, z_2)$. Если потери энергии считать по формуле (3) $h_n = kv$, из уравнения нестационарного движения будем иметь

$$\alpha_0 l \frac{dv}{dt} + gkv - X(x_2 - x_1) - Y(y_2 - y_1) - Z(z_2 - z_1) = 0. \quad (13)$$

Пусть вектор переносного ускорения действует в горизонтальной плоскости и с осью ox составляет угол ν , тогда $X = a \cos \nu$; $Y = a \sin \nu$; $Z = -g$. Учитывая, что $z_2 - z_1 = 2\delta$; $v = \frac{\Omega}{\omega} \frac{d\delta}{dt}$ и обозначая $p = \frac{gk}{\alpha_0 l}$,

$$q = \frac{2g\omega}{\alpha_0 l \Omega};$$

$$b = \frac{\omega}{\alpha_0 l \Omega} [(x_2 - x_1) \cos \nu + (y_2 - y_1) \sin \nu],$$

из (13) получим неоднородное линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами

$$\delta'' + p\delta' + q\delta = b \cdot a(t). \quad (14)$$

Рассмотрим случай, когда переносное ускорение описывается функцией $a=e^{-\alpha t}(A_1 \cos \gamma t + B_1 \sin \gamma t)$.

Тогда из (14) получим

$$\delta'' + p\delta' + q\delta = e^{-\alpha t}(A \cos \gamma t + B \sin \gamma t), \quad (15)$$

где $A=b \cdot A_1$; $B=b \cdot B_1$.

Общее решение уравнения (15) представим в виде суммы частного решения уравнения (15) и общего решения однородного уравнения

$$\delta'' + p\delta' + q\delta = 0. \quad (15)$$

Частное решение уравнения (15) ищем в форме $\delta_1 = e^{-\alpha t}(C_1 \cos \gamma t + C_2 \sin \gamma t)$.

Коэффициенты C_1 и C_2 должны удовлетворять системе уравнений:

$$\begin{cases} C_1(\alpha^2 - \gamma^2 - p\alpha + q) + C_2\gamma(p - 2\alpha) = A; \\ C_1(2\alpha - p) + C_2(\alpha^2 - \gamma^2 - p\alpha + q) = B. \end{cases} \quad (17)$$

а. Общее решение уравнения (15) при больших сопротивлениях, т. е. при $p^2 - 4q > 0$,

$$\delta = e^{-\alpha t}(C_1 \cos \gamma t + C_2 \sin \gamma t) + C_3 e^{r_1 t} + C_4 e^{r_2 t}, \quad (18)$$

где $r_1 = -\frac{p}{2} + \lambda$; $r_2 = -\frac{p}{2} - \lambda$; $\lambda = \sqrt{\left|\frac{p^2}{4} - q\right|}$;

$$C_3 = \frac{C_1(2\alpha + p + 2\lambda) - 2\gamma C_2}{4\lambda}; \quad C_4 = \frac{2\gamma C_2 - C_1(2\alpha + p + 6\lambda)}{4\lambda}.$$

б. При малых сопротивлениях, т. е. при $p^2 - 4q < 0$,

$$\delta = e^{-\alpha t}(C_1 \cos \gamma t + C_2 \sin \gamma t) + e^{-\frac{p}{2}t}(C_5 \cos \lambda t + C_6 \sin \lambda t), \quad (19)$$

где

$$C_5 = -C_1; \quad C_6 = \frac{(2\alpha - p)C_1 - 2\gamma C_2}{2\lambda}.$$

Примеры. Допустим $l=40$ м, $\nu=0,01$ см²/сек; $D=12$ см; $\nu=45^\circ$; $x_2 - x_1 = 8$ м; $y_2 - y_1 = 6$ м; $\alpha=0,21$ /сек; $A_1=3$ м/сек²; $B_1=2$ м/сек²; $\gamma=1$ 1/сек;

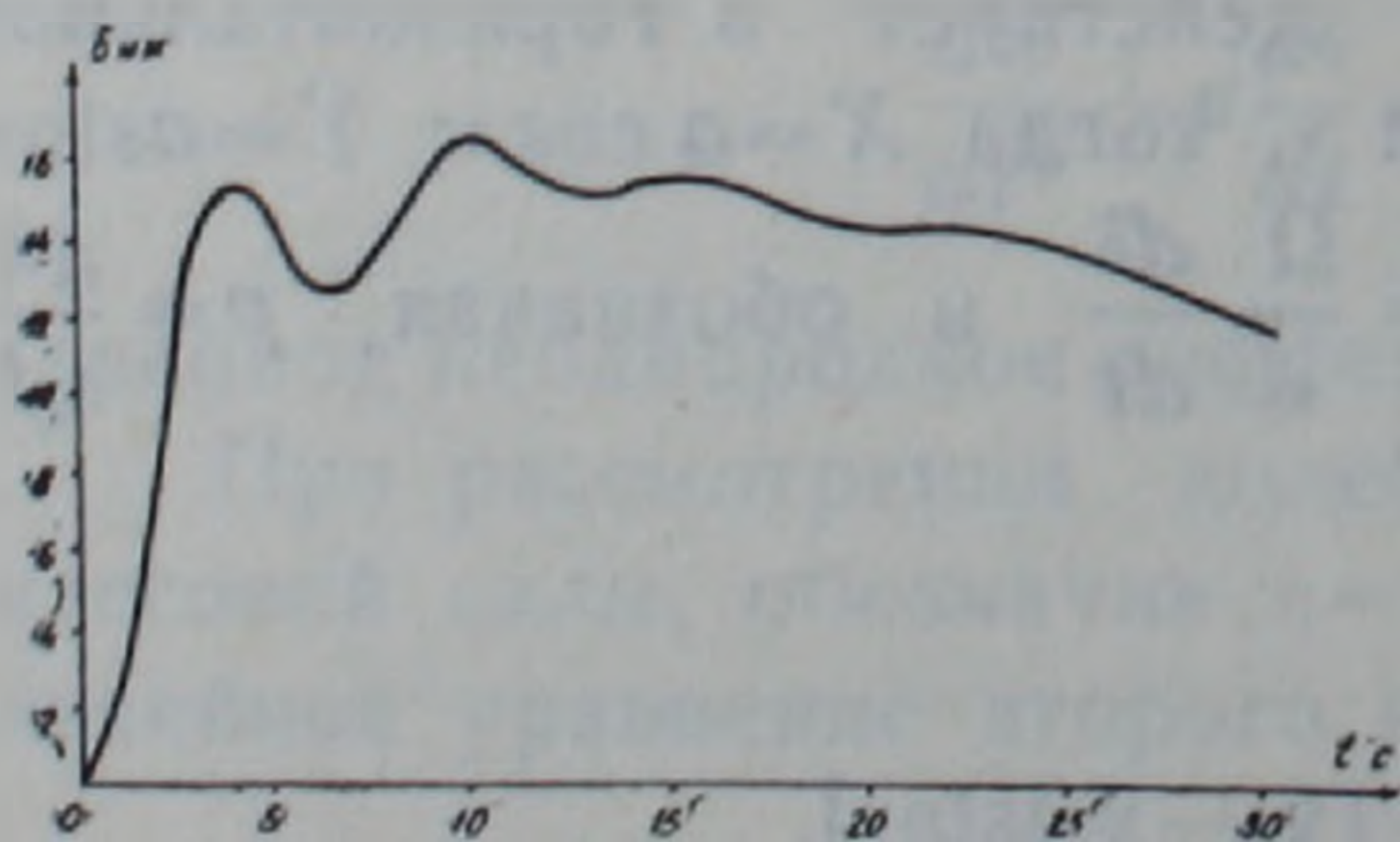


Рис. 3. График закономерности изменения уровней жидкости в сосудах при больших гидравлических сопротивлениях

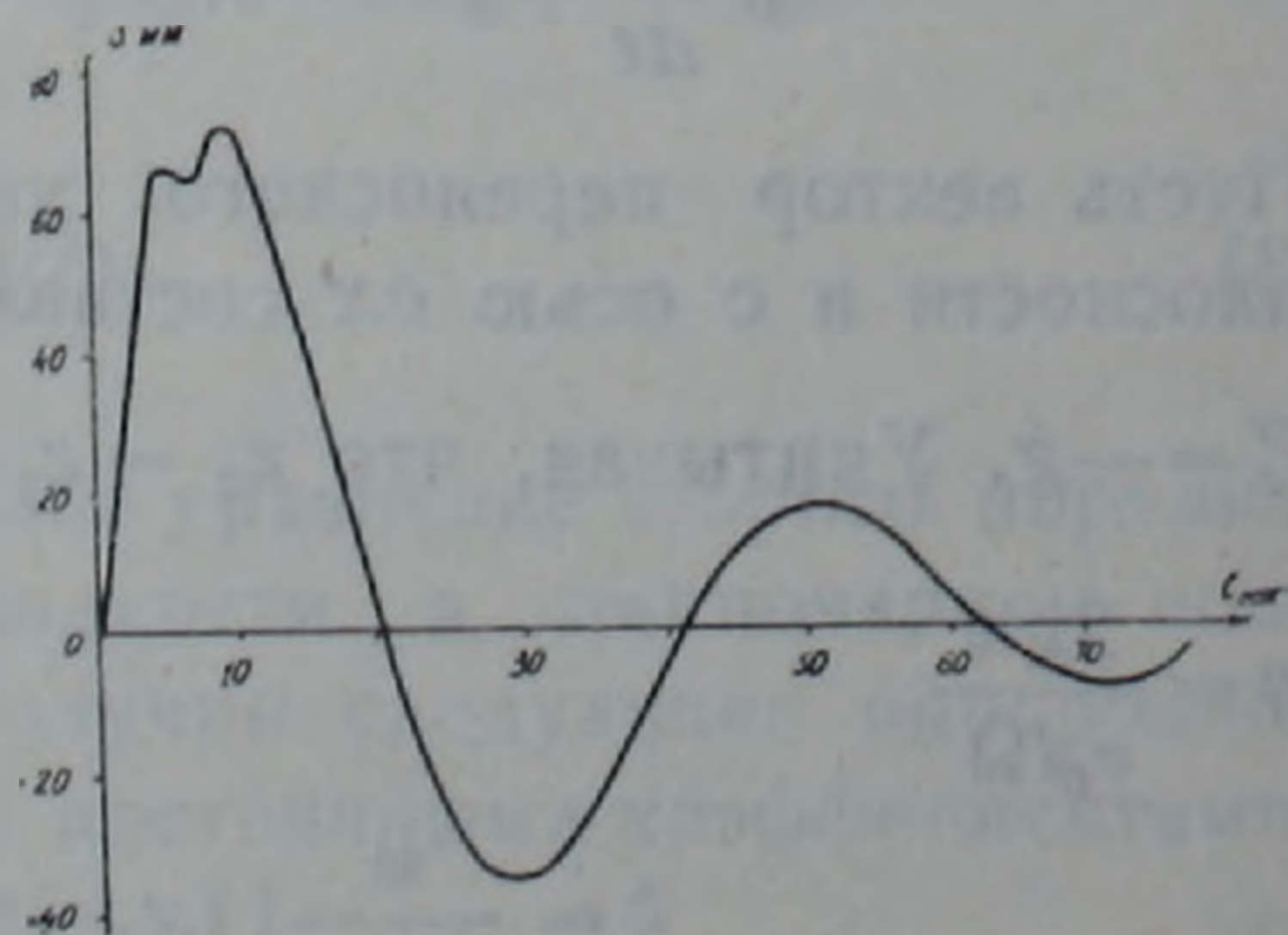


Рис. 4. График, описывающий колебание уровней жидкости в системах гидродинамических нивелиров при малых сопротивлениях

1) при $d_0 = 12$ мм закономерность изменения уровней жидкости в сосудах показана на рис. 3;

2) при $d_0 = 20$ мм результаты вычислений приведены на рис. 4. Приведенные вычисления показывают, что:

1) при затухающем переносном ускорении в трубопроводе возникает колебательное движение как при больших, так и при малых сопротивлениях;

2) после затухания внешних ускорений в системе равновесие жидкости устанавливается по прошествии длительного времени.

Разработанная теория позволяет исследовать движение жидкости в системе трубопроводов при возникновении любых внешних ускорений.

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Ա. Մ. ԲԱՐԽՈՒԴԱՐՅԱՆ

Խողովակներում և հիդրոդինամիկ հարթաչափման համակարգերում
հեղուկի տատանումները զանգվածային ուժերի դաշտում

Հոդվածում դուրս է բերված կաթիլային հեղուկի միաչափ ոչ ստացիոնար շարժման հավասարումը՝ ցանկացած զանգվածային ուժերի դաշտում:

Որպես օրինակ, ուսումնասիրված է երկու տարբեր համակարգերում հեղուկի շարժման բնույթը, որը կարող է առաջանալ զանգվածային ուժերի հանկարծակի փոփոխությունից, օրինակ՝ երկրաշարժի դեպքում:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ.

¹ А. М. Бархударян, Р. А. Мовсесян, Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка, № 6, 1981. ² Р. А. Мовсесян, А. М. Бархударян, Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка, № 6, 1975. ³ Р. А. Мовсесян, А. М. Бархударян, Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. № 1, 1976.

