ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXVII 1983 4

УДК 518 : 517.948

МАТЕМАТИКА

А. А. Бабаджанян

# Об одной итеративной схеме решения операторных уравнений

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. Р. Варшамовым 15/IX 1980)

В настоящей работе предложен нестационарный, итеративный метод решения линейных уравнений вида

$$x=Ax+f \quad (x\in E), \tag{1}$$

где $A$ вполне непрерывный оператор $A: E\to E$, $E$—банахово пространство. Предполагается единственность решения системы (1) для $f\in R(I-A)=E$, где $R(A)$—образ оператора $A$, $I$—тождественный оператор. Ниже операторы в конечномерном пространстве $E_n$ и соответствующие им в фиксированном базисе матрицы отождествляются.

Предлагаемый нестационарный процесс в частном случае совпадает с известными процессами интеративного агрегирования, предложенными в работах ([1, 2]).

1. Согласно ([3]) нестационарный, итеративный метод осредненных поправок Ю. Д. Соколова выпишем в следующем виде

$$x^{(k+1)}=Ax^{(k)}+AP_k(x^{(k+1)}-x^{(k)})+f, \tag{2}$$

где $P_k$—проектор на некоторое подпространство $E_{(k)}$ пространства $E$. Здесь и ниже $E_{(k)}$ замкнутые подпространства шага $k$.

Выберем (!) на каждом шаге $k+1(k=0, 1, \ldots)$ по найденному приближению $x^{(k)}$, начиная с заданного $x^{(0)}\neq 0$, такой проектор $P_k$ (линейный, идемпотентный оператор, определенный на всем $E$), чтобы имело место $x^{(k)}\in P_kE=E_{(k)}$ для всех $k=0, 1, \ldots$, которое назовем условием (В).

Тем самым мы исходим из того, что информация, полученная на предыдущем шаге $k$, максимально использовалась в осредненной поправке (на шаге $k+1$).

Тогда (2) получит вид

$$x^{(k+1)}=AP_kx^{(k+1)}+f. \tag{3}$$

Уравнение (3) после переобозначения $AP_k=A_{k+1}$ имеет вид, рассматриваемый общей теорией приближенных методов Л. В. Канторовича (где $f_{k+1}\equiv f$) ([4]). В этом случае условие (В) означает „абсолютно хорошую" аппроксимацию элемента $x^{(k)}\in E$ элементами $P_kx^{(k)}\in E_{(k)}$.

Нам представлялся полезным показ связи предлагаемого метода с методом Ю. Д. Соколова, хотя кратко — это решение уравнения (1) с помощью (3) ([5]), но итеративным образом и со специальным выбором проектора $P_k$, удовлетворяющим (В), $k=0, 1, \ldots$.

Расщепив пространство $E$ (применяя оператор проектирования $P_k$ к обеим частям уравнения (3)), можно найти решение последовательно из итеративного процесса:

$$P_k x^{(k+1)} = P_k A P_k x^{(k+1)} + P_k f, \tag{4}$$

$$x^{(k+1)} = A P_k x^{(k+1)} + f \quad (k=0,\ 1, \ldots). \tag{5}$$

Предполагается, что $P_k f \neq 0$ для $k=0,\ 1,\ \ldots$

В конечномерном случае $E=E_n$ известно (6), что всякий проектор может быть представлен в виде скелетного разложения рефлексивно (взаимно) полуобратных матриц, тем самым

$$P_k = T_k^- T_k,$$

где $\operatorname{rank} T_k = \operatorname{rank} T_k^- = \dim E_{n(k)} = n(k)$, $n(k)=1, \ldots, n-1$.

Этот факт позволяет „сократить" на $T_k^-$ обе части уравнения (4) и представить (4), (5) в эквивалентной форме:

$$T_k x^{(k+1)} = T_k A T_k^- T_k x^{(k+1)} + T_k f, \tag{6}$$

$$x^{(k+1)} = A T_k^- T_k x^{(k+1)} + f \quad (k=0,\ 1, \ldots). \tag{7}$$

Будем считать матрицу $T_k$ заданной, причем так, чтобы $T_k f \neq 0$ ($k=0,\ 1, \ldots$). Тогда для выполнения условия (B) $T_k^-$ должно удовлетворять соотношению

$$T_k^- T_k x^{(k)} = x^{(k)}, \quad (k=0,\ 1, \ldots). \tag{8}$$

Для выбора таких полуобратных матриц можно использовать известные алгоритмы (7).

В частности, на наш взгляд, наиболее простые алгоритмы в этом случае получаются при выборе матрицы $T_k$ в „расщепляющемся" виде, т. е. когда в каждом столбце имеется единственный ненулевой элемент.

Соответствующим образом изложенный принцип подхода относится и к случаю решения (1) с помощью уравнения

$$x = P_k A x + f, \quad (k=0,\ 1, \ldots), \tag{3'}$$

но из условия „абсолютно хорошей" аппроксимации на каждом шаге $k+1$ образов $Ax^{(k)} \in E$ элементами $P_k A x^{(k)} \in E_{(k)}$, т. е. $P_k A x^{(k)} = A x^{(k}$ (условие ($B'$)) с начальным приближением $x^{(0)} \neq 0$. Здесь требуется $P_k A f \neq 0$ ($k=0,\ 1, \ldots$).

Такой итеративный процесс можно записать в следующем виде:

$$P_k A x^{(k+1)} = P_k A P_k A x^{(k+1)} + P_k A f, \tag{4'}$$

$$x^{(k+1)} = P_k A x^{(k+1)} + f \quad (k=0,\ 1, \ldots), \tag{5'}$$

или, в конечномерном случае, с заданной на каждом шаге матрицей $T_k$ в эквивалентном виде:

$$T_k A x^{(k+1)} = T_k A T_k^- T_k A x^{(k+1)} + T_k A f, \tag{6'}$$

$$x^{(k+1)} = T_k^- T_k A x^{(k+1)} + f \quad (k=0,\ 1, \ldots). \tag{7'}$$

В обоих процессах уравнение (5) или (7), соответственно, (5′) или (7′) (сужается и) решается относительно $P_k x^{(k+1)}$ или $T_k x^{(k+1)}$, соответственно, $P_kAx^{(k+1)}$ или $T_kAx^{(k+1)}$ в подпространстве $E_{(k)}=P_kE$ или $E_{n(k)}=T_kE_n$ и корректируется в $E$ или $E_n$ (расширяется на все $E$ или $E_n$).

Соответственно назовем: (4), (4′) — *проектирующими* (или *усеченными*), (5), (5′) — *корректирующими* и (3), (3′) — *аппроксимирующими* уравнениями. Сам процесс назовем *итеративно-проекционным* (в отличие от ([3,5,10])).

В зависимости от того, зависит или нет матрица $T_k$ от шага итерации, будем различать процессы с *переменным* или *фиксированным направлением проектирования.*

Известные процессы итеративного агрегирования ([1,2,8]), где: $A=\{a_{ij}\}_1^n$, $a_{ij}\geqslant 0$, $\|A\|_1<1$ и $T_k\equiv T$ имеет расщепляющийся неотрицательный вид

$$T=\begin{pmatrix} 1\ldots 1\ 0\ldots\ldots\ldots\ldots 0 \\ 0\ldots 0\ 1\ldots 1\ 0\ldots\ldots 0 \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ 0\ldots\ldots\ldots\ldots 0\ 1\ldots 1 \end{pmatrix},$$

как очень частный случай вкладываются в предлагаемую схему решения ([9]).

Одновременно. результаты данной работы (и ([9])) являются математической основой методов итеративного агрегирования. Таким образом, шаг агрегирования — это (косое) проектирование из $E_n$ в $E_m$ ($m<n$), в отличие от проекционных методов ([5]) действующих из бесконечномерного пространства (причем ортогонально, что для них существенно).

Заметим, что в конечных методах агрегирования в основном используется ортогональное проектирование ([9]).

2. Проитерируем $l$ раз уравнение (1)

$$x=A^{l+1}x+A^lf+\ldots+Af+f. \tag{10}$$

Будем приближать решение (10) (или (1)) с помощью

$$x=AP_kA^lx+A^lf+\ldots+Af+f \tag{11}$$

соответственно

$$x=P_kA^{l+1}x+A^lf+\ldots+Af+f, \tag{11′}$$

но итеративным образом и с выбором на каждом шаге $k+1$ проектора $P_k$ так, чтобы выполнялось обобщенное условие $(B)$ или $(B')$, а именно $P_kA^lx^{(k)}=A^lx^{(k)}$ или $P_kA^{l+1}x^{(k)}=A^{l+1}x^{(k)}$.

Тогда процесс решения (11) или (11′) можно представить в виде

$$P_kA^lx^{(k+1)}=P_kAP_kA^lx^{(k+1)}+P_kA^lf\quad (k=0,1,\ldots),$$
$$x^{(k+1)}=AP_kA^lx^{(k+1)}+A^lf+\ldots+Af+f,$$

соответственно

$$P_kA^{l+1}x^{(k+1)}=P_kAP_kA^{l+1}x^{(k+1)}+P_kA^{l+1}f\quad (k=0,1,\ldots),$$
$$x^{(k+1)}=P_kA^{l+1}x^{(k+1)}+A^lf+\ldots+Af+f.$$

Аналогично п. 1 уравнение (11) или (11′) разрешается в подпространстве $E_{(k)}$ или $E_{n(k)}$ и корректируется в $E$ или $E_n$.

На наш взгляд, такой подход дает возможность ускорить скорость сходимости приближений $x^{(k)}$ к решению (1).

Этот прием явился основой предложенных автором кратных методов итеративного агрегирования ([2,8]).

3. Получены достаточные условия сходимости процессов предложенных в п. п. 1 и 2 ([9]). Более подробное изложение этих вопросов и их приложения даются в других работах автора.

Вычислительный центр Академии наук
Армянской ССР и Ереванского
государственного университета.

Ա. Ա. ԲԱԲԱՋԱՆՅԱՆ

**Օպերատորային հավասարումների լուծման իտերատիվ մեկ սխեմայի մասին**

*Աշխատության մեջ դիտարկված է բանախովյան տարածության մեջ երկրորդ սեռի հավասարումների համակարգի իտերատիվ լուծման մեկ ընդհանուր մոտեցումը։ Առաջարկված է երկու իտերատիվ-պրոեկցիոն պրոցես։ Այդ դեպքերի համար դիտարկված է բազմաքայլ իտերատիվ մեթոդը։*

*Հանրագումարի է բերված նաև անվերջ չափանի դեպքը լրիվ-անընդհատ օպերատորով։*

## ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Л. М. Дудкин, Э. Б. Ершов*, Плановое хозяйство, № 5, 1965. [2] *А. А. Бабаджанян*, ДАН АрмССР, т. 71, № 5 1980. [3] *Н. С. Курпель, Т. С. Курченко*, Двусторонние методы решения систем уравнений, Наукова думка, Киев, 1975. [4] *Л. В. Канторович*, УМН, т. 3, вып. 6 (1948). [5] *М. А. Красносельский, Г. М. Вайникко, П. П. Забрейко* и др., Приближенное решение операторных уравнений. Наука, М., 1969. [6] *Л. С. Соболев*, Введение в теорию кубатурных формул, Наука, М., 1974. [7] *Д. К. Фадеев, В. Н. Фадеева*, Записки научных семинаров ЛОМИ, т. 54, 1975. [8] Теория и практика использования методов агрегирования в планировании и управлении. Материалы совещания. (Казань, 1—5 июня 1982 г.), Ереван, 1983. [9] *А. А. Бабаджанян*, Методы агрегирования, препринт 82—3, Ереван, 1982. [10] *Н. С. Курпель*, Проекционно-итеративные методы решения операторных уравнений, Наукова думка, Киев, 1968.