ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXVII 1983 3

УДК 539.375.539.3

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Н. Ф. Морозов, М. В. Паукшто

О дискретных моделях двумерной теории упругости

(Представлено академиком АН Армянской ССР Н. Х. Арутюняном 7/VI 1982)

п. 0. Вопрос о соотношении между дискретными и непрерывными моделями теории упругости имеет давнюю историю и восходит к работе Коши ([1]). Следующие два столетия проходят с приоритетом непрерывных моделей. Свойства структуры, не отражаемые классической упругостью, учитывались более сложными, но по-прежнему непрерывными моделями моментной теории упругости ([2,3]). Однако дальнейшее развитие теории трещин и острых вырезов и невозможность объяснения некоторых качественных и количественных эффектов в рамках непрерывной теории вновь обращают исследователей к дискретным моделям (см. например ([4])). В работах ([5,6]) Л. И. Слепян применил дискретную модель к задаче распространения трещины и определил, в частности, долю притекающей в конец трещины энергии, идущей на разрушение, и зависимость этой доли от скорости распространения трещины. Такой анализ был невозможен на основе классической теории упругости.

В настоящей работе описывается широкий класс дискретных моделей, дающих близкие к классической теории упругости результаты, и выясняется степень их близости.

С математической точки зрения рассматриваются дифференциально-разностные аппроксимации динамической системы уравнений Ламе, имеющие вид уравнений Ньютона, и устанавливаются условия сходимости данной аппроксимации. Разностные схемы, изученные О. А. Ладыженской в работе ([7]), не входят в рассматриваемый класс приближений, но при исследовании устойчивости используется предложенный там метод Фурье.

Динамические уравнения одномерной упругой цепочки подробно рассмотрены в книге В. П. Маслова ([8]) и, под иным углом зрения, в работе А. М. Франка и Н. Н. Яненко ([9]).

п. 1. Рассмотрим на плоскости группу G точек единичной массы, связанных невесомыми стержнями. Пусть Γ_x—все точки, соединенные с точкой $x\in G$ и $K(x, y)$, $L(x, y)$—пара функций, характеризующих стержень, соединяющий точки x и $y\in\Gamma_x$. Продолжим нулем $K(x, y)$ и $L(x, y)$ на оставшиеся пары точек $(x, y)\in G\times G$, $y\notin\Gamma_x$. Физически очевидно, что если $y\in\Gamma_x$, то $x\in\Gamma_y$, кроме того, $K(x, y)=K(y, x)>0$, $L(x, y)=L(y, x)$, $y\in\Gamma_x$. Пусть $u=u(x)=u(x, t)$ —вектор смещения точки $x \in G$ в момент времени t, тогда продольной жесткости $K(x, y)$ соответствует сила

$$K(x, y)\{ |y-x+u(y)-u(x)| - |y-x|\} \frac{y-x+u(y)-u(x)}{|y-x+u(y)-u(x)|},$$

или, учитывая $|u(x)-u(y)| \ll |y-x|$, после линеаризации по Коши [11]

$$K(x, y)(u(y)-u(x),\ y-x) \frac{y-x}{|y-x|^2}.$$

В нашем случае сила, соответствующая стержню, принимается равной

$$K(x, y)(u(y)-u(x),\ y-x)\frac{y-x}{|y-x|^2}+L(x, y)(u(y)-u(x),\ (y-x)^{\perp})\frac{(y-x)^{\perp}}{|y-x|^2}$$

здесь $(,)$—скалярное произведение на плоскости, $v^{\perp}$ вектор, ортогональный вектору v и такой, что $|v^{\perp}|=|v|$.

Таким образом, для каждой точки $x \in G$ имеем соотношение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sum_{y \in G} \Big\{ K(x, y)(u(y)-u(x),\ y-x) \frac{y-x}{|y-x|^2} + $$
$$+ L(x, y)(u(y)-u(x),\ (y-x)^{\perp}) \frac{(y-x)^{\perp}}{|y-x|^2} \Big\}. \qquad (1)$$

Чтобы упростить это уравнение, предположим дополнительно, что G—решетка:

$$G=\{x \in R^2 : x=hHn\},$$

где H—матрица с определителем, равным единице, n—целочисленный вектор, h—параметр. Кроме того, пусть G „устроена в каждой точке одинаково“ и жесткости K и L постоянны, тогда $\Gamma_x=\{c_i\}_i^m=-m$, $j \neq 0$, и обозначив через K_j, L_j соотношение жесткостей j-го стержня к квадрату его длины, запишем (1) в виде

$$h^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sum_{j=1}^{m} \{K_j(\bar{\nabla}_{hc_j}\nabla_{hc_j}u,\ c_j)c_j+L_j(\bar{\nabla}_{hc_j}\nabla_{hc_j}u,\ c_j^{\perp})c_j^{\perp}\}, \qquad (2)$$

через ∇_{c_j}, $\bar{\nabla}_{c_j}$ обозначены конечные разности

$$\nabla_{c_j}u=u(\cdot+c_j)-u(\cdot),\quad \bar{\nabla}_{c_j}u=u(\cdot)-u(\cdot-c_j).$$

Постоянные K_j, L_j, c_j, $j=1, 2, \ldots, m$ выберем из условия совпадения предельного уравнения, соответствующего (2), с классическим уравнением теории упругости, которое эквивалентно условию

$$K_j(\hat{u},\ c_j)(\xi,\ c_j)^2c_j+L_j(\hat{u},\ c_j^{\perp})(\xi,\ c_j)^2c_j^{\perp}=\mu|\xi|^2\hat{u} + (\mu+\lambda)\xi(\xi,\ \hat{u}), \qquad (3)$$

для любых $\hat{u}=(\hat{u}_1,\ \hat{u}_2)$, $\xi=(\xi_1,\ \xi_2)$.

Нетрудно проверить, что (3) равносильно тождеству

$$(c_{1j}+zc_{2j})^2[K_j(c_{1j}+\zeta c_{2j})^2+L_j(b_{1j}+\zeta b_{2j})^2]=\mu(z-\zeta)^2+(2\mu+\lambda)(1+z\zeta)^2. \qquad (4)$$

п. 2. Перейдем к вопросу сходимости решения (2) при $h \to 0$ к решению предельной системы

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\sum_{j=1}^{m}\left\{K_j\left(\frac{\partial^2 u}{\partial c_j^2},\ c_j\right)c_j+L_j\left(\frac{\partial^2 u}{\partial c_j^2},\ c_j^{\perp}\right)c_j^{\perp}\right\}=\mu\Delta u+(\mu+\lambda)\operatorname{grad}(\operatorname{div}u), \tag{5}$$

последнее равенство вытекает из условия (4). Запишем соответствующие (5) краевые задачи:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}=v,\\ h^2\dfrac{\partial v}{\partial t}=\sum\limits_{j=1}^{m}\{K_j(\bar\nabla_{hc_j}\nabla_{hc_j}u,\ c_j)c_j+L_j(\bar\nabla_{hc_j}\nabla_{hc_j}u,\ c_j^{\perp})c_j^{\perp}\},\\ u|_{t=0}=u_0(x),\quad v|_{t=0}=0,\quad x\in G,\end{cases} \tag{6}$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}=v,\\ \dfrac{\partial v}{\partial t}=\sum\limits_{j=1}^{m}\left\{K_j\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial c_j^2},\ c_j\right)c_j+L_j\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial c_j^2},\ c_j^{\perp}\right)c_j^{\perp}\right\},\\ u|_{t=0}=u_{00}(x),\quad v|_{t=0}=0,\quad x\in R^2.\end{cases} \tag{7}$$

Пусть $T_h=\{z\in R^2: 2h|H^*z|_\infty<1\}$, тогда преобразование Фурье вектор-функций

$$\widetilde{W}(z)=h^2\sum_{x\in G}\exp\{-i2\pi(x,z)\}W(x) \tag{8}$$

устанавливает изоморфизм пространств $l_2(G)$ и $L_2(T_h)$. После преобразования Фурье

$$\widehat{W}(z)=\int\limits_{R^2}\exp\{-i2\pi(x,z)\}W(x)dx$$

по переменным x в уравнениях (7) и преобразования (8) в системе (6) обозначим матрицы правых частей уравнений (6) и (7) соответственно через $P_h(z)$ и $P(z)$. Образы Фурье решений задач (6) и (7) запишутся в виде

$$\widetilde{W}^h(z,t)=\exp\{tP_h(z)\}\widetilde{W}_0(z),\quad \widehat{W}(z,t)=\exp\{tP(z)\}\widehat{W}_{00}(z),$$

где $\widetilde{W}_0(z)=(\widetilde{u}_0(z),\ 0)$ и $\widehat{W}_{00}(z)=(\widehat{u}_{00}(z),\ 0)$.

Теорема. *Пусть выполнено* (4), $\widehat{u}_{00}$ — *гладкая функция с компактным носителем*, $u_0\in l_2(G)$, *тогда при* $h\to 0$ *выполнена оценка*

$$\|W^h(\cdot,t)-W(\cdot,t)\|_{l_2(G)}\leqslant c(h,t)\|u_0-u_{00}\|_{l_2(G)}+o(1), \tag{9}$$

константы в этом неравенстве не зависят от u_0.

Доказательство. Рассмотрим характеристический многочлен,

$$|P_h(z)-\nu E|=\nu^4+(2\pi)^2\nu^2\frac{\sin^2\pi h(zf_j)}{\pi^2h^2}(K_j|c_j|^2+L_j|c_j^{\perp}|^2)+$$

$$+(2\pi)^4|c_j|^2|c_p|^2\frac{\sin^2\pi h(z,c_j)}{\pi^2h^2}\ \frac{\sin^2\pi h(z,c_j)}{\pi^2h^2}(L_jL_p+K_jK_p). \tag{10}$$

В силу (4) корни $|P(z)-\nu E|$ имеют вид $\pm i\sqrt{\mu}|z|$, $\pm i\sqrt{(2\mu+\lambda)}|z|$. Поэтому нетрудно проверить, что при достаточно малых $h>0$ равномерно по $z\in\operatorname{supp}\hat{u}_{00}$ корни (10) чисто мнимые и простые. Далее при достаточно малых $h>0$

$$W(x, t)=\int\limits_{T_h} e^{i2\pi(x,z)}e^{tP(z)}\hat{W}_{00}(z)dz,$$

и, следовательно, осталось оценить выражение

$$\begin{aligned}&\|\exp\{tP(z)\}\hat{W}_{00}(z)-\exp\{tP_h(z)\}\tilde{W}_0\|_{L_2(T_h)}\leqslant\\ &\leqslant\|(\exp\{tP(z)\}-\exp\{tP_h(z)\})\hat{W}_{00}\|_{L_2(T_h)}+\\ &+\|\exp\{tP_h(z)\}(\hat{W}_{00}-\tilde{W}_0)\|_{L_2(T_h)}.\end{aligned}\tag{11}$$

Используя представление ([10])

$$\exp\{tP_h(z)\}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} e^{t\nu}\frac{Q_h(z, \nu)}{|P_h(z)-\nu E|}d\nu,$$

в котором элементы матрицы $Q_h(z, \nu)$ с точностью до знака совпадают с главными минорами матрицы $P_h(z)-\nu E$, а γ — произвольный спрямленный замкнутый контур, содержащий внутри нули $|P_h(z)-\nu E|$, и тот факт, что $P_h(z)\to P(z)$ при $h\to 0$, найдем, что первое слагаемое в (11) есть $o(1)$ при $h\to 0$. При оценке второго слагаемого в неравенстве (11) используем равномерную ограниченность компонент матрицы $P_h(z)$ при $z\in R^2$. Теорема доказана.

В заключение приведем пример двухконстантной теории упругости: $c_1=(1, 0)$, $c_2=(1/2, \sqrt{3}/2)$, $c_3=(1/2, -\sqrt{3}/2)$, $L_1=L_2=L_3=L$, $K_1=K_2=K_3=K$. При малых $h>0$ эта система соответствует непрерывной теории с постоянными Ламе вида

$$\mu=\frac{3}{8}(K+3L),\qquad \lambda=\frac{3}{8}(K-5L).$$

Нетрудно также обобщить полученные результаты на случай анизотропной теории упругости.

Ленинградский государственный университет
им. А. А. Жданова

Ն. Ֆ. ՄՈՐՈԶՈՎ, Մ. Վ. ՊԱՈՒԿՇՏՈ

Երկչափանի առաձգականության դիսկրետ մոդելների մասին

Դիտարկվում են հարթության վրա կետային զանգվածների համասեռ սիստեմներ։ Զանգվածները միացված են բնութագրիչ $h>0$ երկարությամբ անկշռելի առաձգական ձողերով։

$h\to 0$ դեպքում ստացված է Լյամեյի դասական հավասարումներով նը-

կարագրվող առաձգական միջավայրերի տատանումների և այդ սիստեմների տատանումների միջին իմաստով մոտիկության պարզ հանրահաշվական պայման։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *A. L. Canchy*, Ex. de Math. 1827 (см. *В. В. Новожилов*, Теория упругости, Судпромгиз, Л., 1958). [2] *E. Cosserat, F. Cosserat*, Theorie des cerps deformables, Paris, 1909. [3] *W. Voigt*, Abh. Ges. Wiss. Gottingen, Bd. 34, 1887. [4] *И. А. Кунин*, Теория упругих сред с микроструктурой, Наука, М., 1975. [5] *Л. И. Слепян*, ДАН СССР, т. 258, № 3 (1981). [6] *Л. И. Слепян*, там же, т. 260, № 3 (1981). [7] *О. А. Ладыженская*, УМН, т. 12, № 5 (1957). [8] *В. П. Маслов*, Операторные методы. Наука, М., 1975. [9] *А. М. Франк, Н. Н. Яненко*, О свойствах осредненного движения упругой одномерной решетки и движении мезообъектов. Новосибирск, ИТПМ, препринт № 14, 1980. [10] *Е. А. Горин*, Вестник МГУ, № 4, 1965. [11] *А. Е. Ляв*, Математическая теория упругости, ОНТИ, М., 1935.