

УДК 519.217 : 62.501.7

МАТЕМАТИКА

В. К. Брутян

Синтез марковских управляемых систем с неопределенными параметрами

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. Р. Варшамовым 7/II 1983)

Рассматривается задача синтеза марковских управляемых систем (МУС), обеспечивающих по возможности точное слежение за командными сигналами при наличии неизвестных и неизмеряемых случайных возмущений. Исследуется известный командный сигнал как выход некоторой динамической модели, структура которой известна, а начальное состояние произвольно. Синтез следящей марковской системы с помощью допустимого управляющего закона происходит таким образом, чтобы при допустимых вариациях параметров ошибка слежения оставалась также допустимой. Решение задачи основывается на изучении функции Ляпунова ^(1,2).

Пусть непрерывная МУС определяется линейным дифференциальным стохастическим уравнением

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Du(t) + L\xi(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad t \in I_t \triangleq [t_0, T], \quad (1)$$

где $x(t)$ — n — вектор состояния, $u(t)$ — скалярная функция управления, $\xi(t)$ — вектор нормального белого шума с нулевым математическим ожиданием и корреляционной матрицей $M\{\xi(t)\xi'(\tau)\} = S_{\xi\xi}(t)\delta(t-\tau)$, $S_{\xi\xi}(t)$ — интенсивность нормального белого шума. Элементы матриц A , L и компоненты вектора D могут быть регулярно меняющимися функциями времени с определенными границами ⁽³⁻⁶⁾.

Пусть:

1) матрица A необязательно устойчивая, но непрерывная марковская система является полностью управляемой;

2) управление выбирается в виде обратной связи по состоянию ^(7,8) и характеризуется функцией $u(t) = G(t) \operatorname{sign} F(\Delta x(t))$, где $\Delta x(t) = \tilde{x}(t) - x(t)$ — вектор ошибки слежения МУС, причем $\tilde{x}(t)$ — выход динамической модели, структура которой известна, $G(t)$ и $F(\Delta x(t))$ — подлежащие определению неизвестные функции;

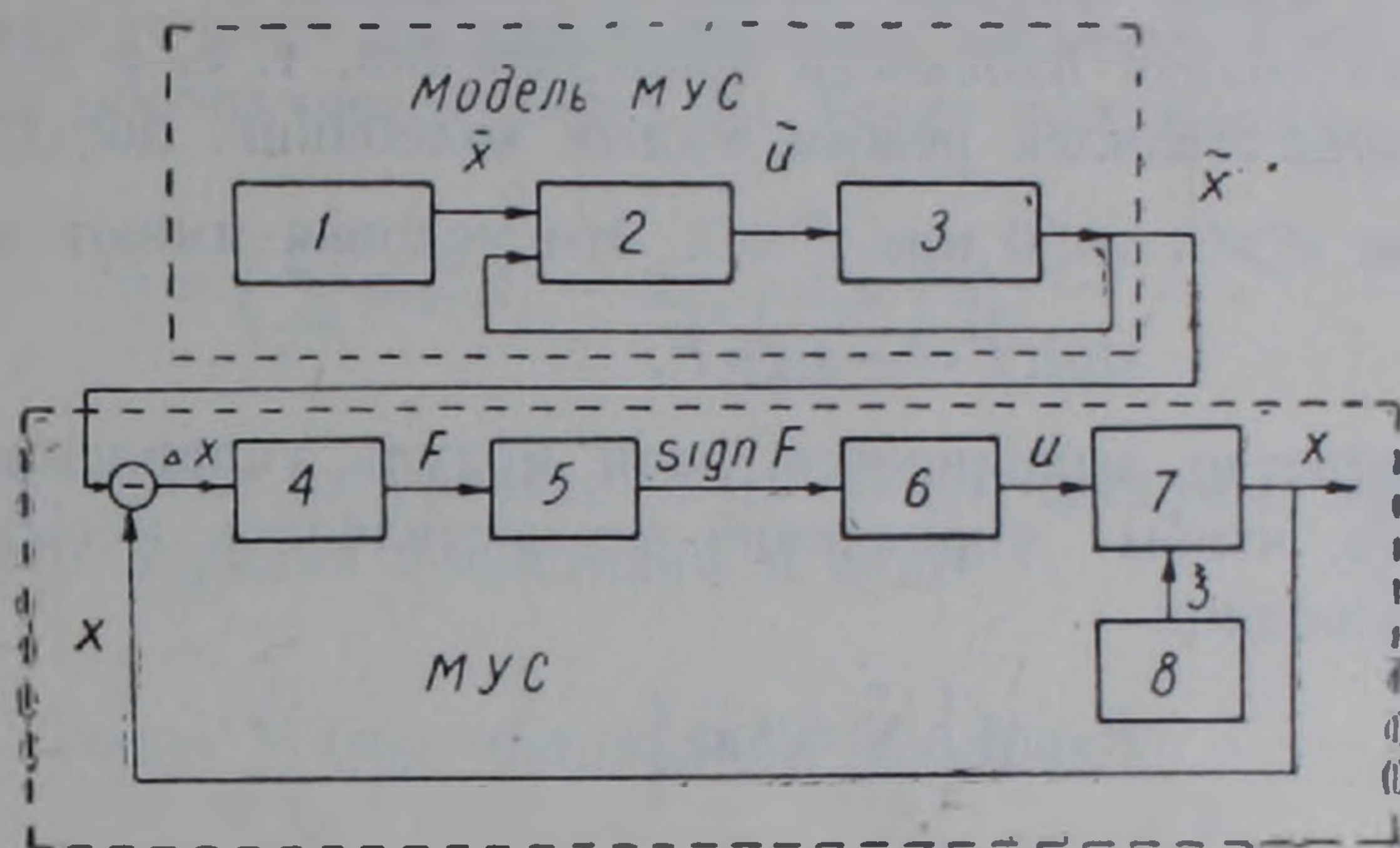
3) $F(\Delta x(t))$ является линейной функцией и описывается формулой

$$F(\Delta x(t)) = M\{\beta(t)\Delta x(t)\} = M\left\{\sum_{i=1}^n \beta_i(t)\Delta x_i(t)\right\};$$

4) элементы матрицы $\delta_1 \triangleq \tilde{A} - A$ и компоненты вектора $\delta_2 \triangleq \tilde{D} - D$

являются медленно меняющимися функциями времени на I , с определенными границами.

При этих предположениях рассматривается принцип функционирования следящей МУС, составленной из двух подсистем и представленной на рисунке. Заданный командный сигнал поступает на вход модели. Состояние следящей МУС есть функция текущего состояния динамической модели, т. е. входом МУС является ошибка, соответствующая отклонению выходного сигнала МУС от текущего состояния динамической модели.



Структурная схема следящей МУС. 1—генератор командного сигнала; 2—компенсатор; 3—модель МУС с номинальными параметрами; 4—линейный закон управления; 5—идеальное реле; 6—коэффициент усиления G ; 7—объект управления; 8—генератор помехи

Пусть динамическая модель с номинальными параметрами описывается уравнением

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \tilde{A}\tilde{x}(t) + \tilde{D}u(\tilde{x}(t), \tilde{x}(t)), \quad (2)$$

где $\tilde{x}(t)$ —реакция динамической модели на управление $\tilde{u}(t)$, начальное состояние которого произвольно, $\tilde{A}$ и $\tilde{D}$ являются номинальными значениями матрицы A и вектора D , $\tilde{x}(t)$ —заданный командный сигнал, который заранее не известен.

Задача синтеза состоит в выборе таких переменных параметров $G(t)$ и $\beta(t)$ закона управления, при которых текущее состояние МУС при допустимых вариациях параметров A , D и L с вероятностью 1 следовало бы за некоторым командным сигналом $\tilde{x}(t)$: а) с нулевой ошибкой, если $\delta_1 = \delta_2 = 0$; б) с допустимой ошибкой, если δ_1 и δ_2 ограничены.

Решение сформулированной задачи основывается на рассмотрении функции Ляпунова, т. е. на вычислении положительно определенной квадратичной формы $v = F'(\Delta x) F(\Delta x)/2$. Следует заметить, что если закон управления u выбирается такой, что производная $\dot{v} = F\dot{F}$ является отрицательно полуопределенной, то вектор ошибки слежения Δx , попав с вероятностью 1 в некоторый момент времени $t \in I_t$ на

плоскость переключений (гиперплоскость, определяемая условием $F=0$), остается в дальнейшем с вероятностью 1 в этой плоскости.

Теперь получим условие устойчивости текущего состояния следящей МУС на плоскости переключений. На основании уравнений (1), (2) можно записать уравнение для вектора ошибки слежения

$$\Delta \dot{x} = A\Delta x - \delta_1 \tilde{x} + \tilde{D}\tilde{u} - L\xi - Du \quad (3)$$

или

$$\Delta \dot{x}_i = f_i(\Delta x) + g_i(\tilde{x}, \tilde{u}, \xi) - d_i u, \quad i = 1, \dots, n. \quad (4)$$

Для того чтобы текущее состояние следящей МУС с вероятностью 1 находилось вблизи плоскости переключений, т. е. в МУС с вероятностью 1 осуществлялся режим малых колебаний, достаточно выполнить условия $\dot{v} > 0$, $\dot{v} < 0$ при $F \neq 0$. Эти условия имеют место, если

$$\text{sign } \dot{F} = -\text{sign } F. \quad (5)$$

Это равенство выполняется, если модуль управления u достаточен для того, чтобы управление осуществлялось в соответствии со знаком производной

$$\dot{F} = M \left\{ \sum_{i=1}^n \beta_i \Delta \dot{x}_i \right\}. \quad (6)$$

Эта формула в соответствии с уравнением (4) представляется в виде $\dot{F} = M \left\{ \Phi(\Delta x, \tilde{x}, \tilde{u}, \xi) \right\} - \sum_{i=1}^n \beta_i d_i u$. Отсюда следует, что равенство (5) выполняется, если закон управления u удовлетворяет условиям

$$|u| = G > |M \{ \Phi(\Delta x, \tilde{x}, \tilde{u}, \xi) \} / \sum_{i=1}^n \beta_i d_i|, \quad (7)$$

$$\text{sign} \left(\sum_{i=1}^n \beta_i d_i u \right) = \text{sign } F. \quad (8)$$

Если, помимо этого, в любой момент времени $F(\Delta x) = 0$, то тогда траектория текущего состояния с вероятностью 1 не выходит из плоскости переключений. Для того чтобы определить условия устойчивости текущего состояния, следует заметить, что уравнение (3) описывает текущее состояние в n -мерном пространстве, а траектория текущего состояния на плоскости переключений может быть описана в $n-1$ -мерном евклидовом пространстве. Это следует из равенств $F(\Delta x) = \dot{F}(\Delta x) = 0$. В соответствии с ними понижается размерность уравнения (3), так как исключается из рассмотрения одна из компонент Δx . Благодаря этому можно записать новое уравнение для $n-1$ -мерного вектора ошибки слежения

$$\Delta \dot{x} = h_1(\beta, A, \Delta x) + h_2(\beta, D, \delta_1 \tilde{x}, \delta_2 \tilde{u}, \xi). \quad (9)$$

Поскольку $\tilde{x}$ и $\tilde{u}$ являются выходами динамической модели, а интенсивность нормального белого шума меняется в допустимых границах, то слагаемое h_2 , значение которого зависит от ξ и вариаций δ_1 и δ_2 , является ограниченным. Помимо этого можно доказать (см. приложение), что если $\delta_1 = \delta_2 = \xi = 0$, то слагаемое $h_2 = 0$. Из этого следует,

что если в законе управления u компоненты вектора β выбраны так, что МУС, вектор Δx которой описывается уравнением (9), асимптотически устойчива при $h_2=0$, то вектор ошибки слежения также является ограниченным.

Приложение

Можно доказать, что если $\delta_1=\delta_2=\xi=0$, то слагаемое h_2 в уравнении (9) равно нулю. Уравнение (3) с учетом условий $\delta_1=\delta_2=\xi=0$ представляется в форме $\Delta \dot{x}_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} \Delta x_j = d_i(\tilde{u} - u)$, $i=1, \dots, n$. Пусть вектор D содержит хотя бы два ненулевых элемента и пусть один из этих элементов обозначается через d_2 . Тогда получается

$$u = \left(\sum_{j=1}^n a_{2j} \Delta x_j - \Delta \dot{x}_2 + d_2 \tilde{u} \right) / d_2.$$

Затем, исключая одно из уравнений из общей системы, новую систему пониженного порядка представим в виде

$$\Delta \dot{x}_i = \sum_{j=1}^n (a_{ij} - d_i a_{2j} / d_2) \Delta x_j + d_i \Delta \dot{x}_2 / d_2.$$

Из этого соотношения следует равенство $h_2 = d_i \Delta \dot{x}_2 / d_2$. Поскольку предполагается, что закон управления обеспечивает траекторию текущего состояния на плоскости переключений, которая описывается в $n-1$ -мерном евклидовом пространстве (что следует из равенств $F(\Delta x)=0$, $\dot{F}(\Delta x)=0$), и исключается из рассмотрения одна из компонент вектора Δx , то получаются равенства $\Delta x_2 = \Delta \dot{x}_2 = 0$, и следовательно, $h_2=0$, что и требовалось доказать.

Автор благодарит В. И. Зубова за участие в обсуждении работы.

Ереванский институт
народного хозяйства

Վ. Կ. ԲՐՈՒՏՅԱՆ

Անորոշ պարամետրերով մարկովյան ղեկավարելի համակարգերի սինթեզը

Դիտարկվում է կարգադրող ազդանշաններին բավական ճիշտ հետևող մարկովյան ղեկավարելի համակարգի սինթեզի խնդիրը՝ անհայտ և ոչ չափվող արտաքին պատահական ազդեցությունների առկայությամբ: Կարգադրող ազդեցությունն իրենից ներկայացնում է հայտնի կառուցվածքով, բայց կամավոր սկզբնական վիճակով դինամիկ համակարգի ելքային փոփոխական: Թույլատրելի ղեկավարող օրենքի օգնությամբ հետևող մարկովյան համակարգի սինթեզը իրականացվում է այնպես, որ պարամետրի թույլատրելի

փոփոխումների դեպքում հետևելու սխալը նույնպես մնա թույլատրելի սահմաններում: Խնդրի լուծման մեթոդը հիմնված է լայնությունի ֆունկցիայի կիրառման վրա:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ Н. Н. Красовский, Теория управления движением, Наука, М., 1968. ² В. И. Зубов, Лекции по теории управления, Наука, М., 1975. ³ В. К. Брутян, Некоторые вопросы применения марковских процессов к исследованию нелинейных автоматических систем, Изд-во Ереванск. гос. ун-та, 1974. ⁴ В. К. Брутян, Автоматика и телемеханика, № 7, 1980. ⁵ В. К. Брутян, Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, № 6, 1980. ⁶ В. К. Брутян, Уч. зап. ЕрГУ. Сер. естественных наук, т. 145, № 3 (1980). ⁷ В. К. Брутян, Изв. АН АрмССР. Сер. техн. наук, т. 35, № 1 (1982). ⁸ В. К. Брутян, Изв. АН АрмССР. Сер. техн. наук, т. 35, № 5 (1982).