ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXVII 1983 3

УДК 51:621.391

МАТЕМАТИКА

Р. Г. Симонян

Пространства толерантности, порожденные мажоритарными пространствами

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. Р. Варшамовым 24/XI 1982)

1. Отношение толерантности (т. е. рефлексивное и симметричное отношение) формализует понятие (неполного) «сходства» объектов. В данной работе рассматриваются пространства, элементы которых сходны в том и лишь в том случае, когда на них совпадают значения «достаточно большого» числа признаков. Последнее выражение уточняется с помощью мажоритарных пространств, введенных в [1]. Показано, что такие пространства имеют следующие особенности: они однородны, в них всегда существует стандартного вида базис («правильный» базис). Показано, что класс рассматриваемых пространств по существу совпадает с классом пространств, порожденных монотонными системами (теорема 3). Кроме того, даны необходимые и достаточные условия минимальности правильного базиса.

Все не определенные ниже понятия взяты из [1] и [2].

2. *Основное определение и некоторые его следствия.* Пусть задано мажоритарное пространство $\langle X, M\rangle$. Определим на $\mathcal{B}(X)$ отношение τ правилом:

$$A\tau B \underset{df}{\Leftrightarrow} A\oplus B\in M \qquad A\oplus B=(A\cap B)\cup(\overline{A}\cap\overline{B}).$$

Введенное нами отношение есть толерантность. Нашей задачей будет характеризация пространства $\langle\mathcal{B}(X), \tau\rangle$.

Теорема 1. *$A\equiv B$ тогда и только тогда, когда $A\oplus B$—доминирующее множество.*

Следствие. *Толерантность τ есть эквивалентность тогда и только тогда, когда M—фильтр.*

Следующая теорема нужна для обоснования корректности важного определения. *Компонентой связности* пространства $\langle\mathcal{B}(X),\tau\rangle$ будем называть компоненту связности графа отношения τ.

Теорема 2. *В пространстве $\langle\mathcal{B}(X), \tau\rangle$ все компоненты связности изоморфны между собой.*

Мы несколько расширим предмет исследования, впрочем, как будет видно ниже, несущественно. Дело в том, что введенное нами выше определение отношения τ на $\mathcal{B}(X)$ имеет смысл и при более общих условиях, когда M будет произвольной *монотонной системой*, т. е. M будет удовлетворять лишь условиям 1 и 2 из [1].

Теорема 2 сохраняет силу и при этих более общих условиях. Будем теперь M считать монотонной системой и введем определение, которое корректно в силу теоремы 2.

Определение. Будем говорить, что два пространства $\langle\mathcal{B}(X), \tau\rangle$ и $\langle\mathcal{B}(X'), \tau'\rangle$ *однотипны*, если компоненты связности их изоморфны.

Однотипные пространства могут различаться лишь количеством компонент связности, но внутренние структуры их компонент одинаковы. Ясно, что однотипность есть эквивалентность. *Типом* пространств толерантности будем называть произвольный класс эквивалентности по этому отношению.

Выделим теперь среди монотонных систем два класса. Один класс составят уже известные нам мажоритарные системы, во второй класс попадут монотонные системы, которые удовлетворяют условиям 1, 2 и

$$4. \bigcap_{A\in M} A=\varnothing.$$

Объединение этих двух классов даст все монотонные системы. Соответствующие классы пространств толерантности обозначим через T_1 и T_2.

Теорема 3. *Любой тип пространств толерантности имеет непустое пересечение как с* T_1, *так и* T_2.

Нас в этой работе интересует внутренняя структура рассматриваемых пространств, и наши дальнейшие утверждения зависят не от конкретных пространств, но от их типов. Поэтому в дальнейшем в силу теоремы 3 мы можем предполагать выполнение либо 3 либо 4 (что-либо одно) либо даже отбросить оба эти условия и тем не менее считать, что имеем дело с мажоритарными пространствами. Это удобно при рассмотрении контрпримеров.

3. *Правильные классы толерантности. Правильный базис.* Пусть $A, B\subseteq X$. *Сегментом* $[A, B]$ будем называть семейство $\{C\subseteq X / A\cap B\subseteq C\subseteq A\cup B\}$. Предкласс (а также класс) толерантности назовем *правильным*, если он с любыми своими двумя элементами A и B содержит и весь сегмент $[A, B]$.

Лемма 1. *$A\tau B$ тогда и только тогда, когда $[A, B]$—правильный предкласс.*

Теорема 4. *Всякий правильный предкласс толерантности можно вложить в некоторый правильный класс толерантности.*

Следствие. *Правильные классы толерантности образуют базис пространства* $\langle\mathcal{B}(X), \tau\rangle$.

Через φ_B обозначим взаимно-однозначное отображение $\mathcal{B}(X)$ на себя, определяемое формулой $\varphi_B(A)=A\oplus B$. Всякое φ_B является автоморфизмом пространства $\langle\mathcal{B}(X), \tau\rangle$. Поэтому, если $\mathcal{A}$—класс толерантности, то и $\varphi_B(\mathcal{A})$—класс толерантности. Если к тому же $B\in\mathcal{A}$, то $\varphi_B(\mathcal{A})$—класс толерантности, целиком состоящий из большинств. Таким образом, достаточно описать классы толерантности, целиком лежащие в M; все остальные можно получить с помощью автоморфизмов φ_B. Классы, целиком лежащие в M, до некоторой степени характеризует следующее утверждение: *класс $\mathcal{A}$ лежит в M тогда и только тогда, когда $X \in \mathcal{A}$. Далее, $\mathcal{A}$—правильный класс тогда и только тогда, когда $\varphi_B(\mathcal{A})$ также правильный класс.* Здесь вновь достаточно описать правильные классы, состоящие только из большинств. Их характеристика дается в следующей теореме.

Теорема 5. *Пусть $\mathcal{A}$—класс толерантности и $\mathcal{A} \subseteq M$. Тогда $\mathcal{A}$—правильный класс в том и только в том случае, когда $\mathcal{A}$ есть максимальный по включению фильтр в M.*

Существуют пространства толерантности, в которых всякий класс толерантности правильный (например, если M—фильтр; имеются и менее тривиальные примеры, скажем, при большинстве «в два голоса из трех»). Есть, однако, пространства, в которых имеется базис, не содержащий ни одного правильного класса толерантности. Позже будет построен соответствующий пример. Мажоритарные пространства, порождающие толерантность первого рода, будем называть *правильными.* Имеется простая их характеристика.

Теорема 6. *Пространство $\langle X, M \rangle$ правильное тогда и только тогда, когда для любых $A, B \in M$ имеем $A \tau B \Leftrightarrow A \cap B \in M$.*

Приведем теперь пример пространства, в котором имеется базис, не содержащий ни одного правильного класса толерантности.

Пусть X—произвольное множество и $M = \{A / |A| \geqslant 1\}$. Заметим, что если $|X| \geqslant 2$, то соответствующее пространство толерантности лежит в классе T_2, однако по теореме 3 аналогичный пример можно построить и с помощью мажоритарных пространств. Правильный класс в таком пространстве есть либо максимальный собственный фильтр, либо максимальный собственный идеал. Теперь для каждого правильного класса $\mathcal{A}$ определим класс $\mathcal{A}^*$, поменяв X на $\varnothing$ или $\varnothing$ на X. При этом $\mathcal{A}^*$ в самом деле будет классом толерантности, однако при $|X| \geqslant 3$ класс $\mathcal{A}^*$ уже не будет ни максимальным собственным фильтром, ни максимальным собственным идеалом, т. е. не будет правильным классом. Тем не менее совокупность всех классов типа $\mathcal{A}^*$ образует базис нашего пространства толерантности.

Заметим, что в построенном пространстве толерантности „очень много" классов толерантности; именно, если X—конечное множество, то в пространстве $\langle \mathcal{B}(X), \tau \rangle$ имеется $2^{2^{|X|-1}}$ классов толерантности.

Еще пример. Пусть $\langle X, M_X \rangle$ — правильное мажоритарное пространство и $a \notin X$. Положим $Y = X \cup \{a\}$ и пусть M_Y состоит из всех множеств вида $A \cup \{a\}$, где $A \in M_X$, кроме того содержит X. Тогда $\langle Y, M_Y \rangle$ —правильное мажоритарное пространство, существенно отличающееся от первого в том смысле, что принадлежит иному типу. Вся конструкция показывает, что типов правильных пространств имеется бесконечное число.

Базис, состоящий из правильных классов толерантности, играет особую роль (мы его будем называть *правильным базисом),* поскольку в некоторых случаях это единственный базис пространства толерантности. Мы поэтому рассмотрим его подробнее, а именно, выпишем условия, при которых правильный базис является минимальным. Введем следующее определение.

Через T_A обозначим множество $\{B \subseteq X / B \tau A\}$. Совокупность классов толерантности, содержащих A и покрывающих T_A, назовем *базисным покрытием T_A.*

Пусть для каждого A π_A обозначает базисное покрытие T_A.

Тогда $\bigcup\limits_{A\subseteq X}\pi_A$ есть базис пространства толерантности. Обратно, пусть a—некоторый базис пространства толерантности и пусть π_A^a—совокупность классов толерантности базиса a, содержащих A.

Тогда π_A^a, очевидно, покрывает T_A и потому есть базисное покрытие.

Теорема 7. *Если a—правильный базис пространства толерантности, то a—минимальный по включению базис тогда и только тогда, когда π_A^a—минимальное по включению базисное покрытие T_A для любого A.*

Заметим, что если π_A^a—минимальное базисное покрытие для T_A, то $\varphi_B(\pi_A^a)$ есть также минимальное базисное покрытие (для $T_{A\oplus B}$) при всяком B. В частности, в качестве B можно выбрать само A. Тогда $\varphi_A(T_A)=T_X$ и $\varphi_A(\pi_A^a)$ есть просто совокупность максимальных в M фильтров. Теперь применение теоремы 7 дает

Следствие. *Правильный базис минимален тогда и только тогда, когда совокупность максимальных в M фильтров образует минимальное базисное покрытие M.*

Далее можно получить следующее следствие к следствию.

Следствие. *Если $\langle X, M\rangle$—конечное мажоритарное пространство (и вообще, если максимальные в M фильтры—главные), то правильные классы толерантности образуют минимальный базис в $\langle \mathscr{B}(X), \tau\rangle$.*

В заключение приведем пример пространства, в котором правильные классы не образуют минимального базиса.

Пусть X—бесконечное множество, Ф—семейство всех дополнений до конечных подмножеств из X. Известно, что Ф—фильтр. Пусть $X'\subseteq X$ таково, что X' и $\overline{X'}$—бесконечны. Рассмотрим семейство подмножеств из X такое, что для любого X'' из этого семейства имеет место $|X'\setminus X''|=|X''\setminus X'|<\infty$. Главные фильтры, порожденные элементами этого семейства, и фильтр Ф составят нашу систему M. Из построения M видно: все выделенные нами фильтры есть максимальные по включению фильтры в M и Ф покрывается остальными фильтрами. Согласно следствию к теореме 7 в таком пространстве правильные классы не образуют минимального базиса.

Вычислительный центр
Академии наук Армянской ССР
и Ереванского государственного университета

Ռ. Գ. ՍԻՄՈՆՅԱՆ

Մաժորիտար տարածություններով ծնված տոլերանտության տարածությունները

Տոլերանտության հարաբերությունը (այսինքն ռեֆլեքսիվ և սիմետրիկ հարաբերությունը) հանդիսանում է օբյեկտների «նմանության» ֆորմալացում։ Դիտարկվող տարածության էլեմենտները «նման են» այն և միայն այն դեպքում, երբ նրանց հայտանիշների «գերակշռող մասը» համընկնում է։ Վերջին արտահայտությունը ճշգրիտ է դարձվում Յու. Ա. Շրեյդերի և Ն. Յա.

Վիլենկինի կողմից առաջարկված մաժորիտար տարածության գաղափարի օգնությամբ։ Ցույց է տրված, որ դիտարկվող տարածություններին բնորոշ են հետևյալ հատկությունները. Նրանք համասեռ են, միշտ ունեն ստանդարտ տեքստի բազիս («ճիշտ» բազիս)։ Այս տարածությունների դասը ըստ էության համընկնում է մոնոտոն սիստեմներով ծնված տարածությունների դասի հետ։ Բացի այդ, բերված են ճիշտ բազիսի մինիմալության անհրաժեշտ և բավարար պայմաններ։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Н. Я. Виленкин, Ю. А. Шрейдер.* Семиотика и информатика, вып. 8(1977).

[2] *Ю. А. Шрейдер,* Равенство, сходство, порядок, Наука, М., 1981.