

УДК 517.5

МАТЕМАТИКА

К. С. Казарян

Суммирование по Абелю сопряженных тригонометрических
рядов в весовых пространствах L^p и весовые пространства
 H^p , $1 < p < \infty$

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР А. А. Талаляном 28/IX 1982)

В одной из предыдущих работ ⁽¹⁾ для любого натурального числа N и $1 \leq p < \infty$ автором были установлены необходимые и достаточные условия на весовую функцию $\psi(x) \geq 0$, чтобы система $\{\cos nx, \sin nx\}_{n=N}^{\infty}$ являлась базисом Абеля в пространстве $L^p(\psi dx)$. Эта теорема основывалась на приводимой ниже теореме 1. Сначала приведем некоторые обозначения. В дальнейшем будем считать натуральные числа N , $\{a_i\}_{i=1}^s$, для которых $\sum_{i=1}^s a_i = 2N-1$, и различные точки $x_i (1 \leq i \leq s)$ интервала $[-\pi, \pi)$ фиксированными. Будем рассматривать ядро, имеющее вид

$$K_r(x, t) = P_r(t-x) - \sum_{i=1}^s \sum_{\lambda_i=0}^{a_i-1} P_r^{(\lambda_i)}(t-x_i) T(x_i, \lambda_i, x),$$

где P_r —ядро Пуассона $T(x_i, \lambda_i, x)$ —фундаментальный тригонометрический полином $N-1$ -ой степени: $T^{(h)}(x_i, \lambda_i, x_k)$ равен 1 при $k=i$ и $h=\lambda_i$ и равен нулю в остальных случаях $0 \leq h \leq a_i$, $1 \leq i \leq s$, $T^{(0)} = T$. Для формулировки результатов нам понадобится также следующая весовая функция:

$$\omega(x) = \prod_{j=1}^s \left| \sin \frac{x-x_j}{2} \right|^{a_j}.$$

Теорема 1. Пусть $\psi(x)$ —положительная 2π -периодическая функция и $p \geq 1$. Тогда для того чтобы

$$\left\| \int_{-\pi}^{\pi} K_r(x, t) f(x) dx \right\|_{L^p(\psi)} \leq B_p \|f\|_{L^p(\psi)} \quad (0 < r < 1),$$

необходимо и достаточно, чтобы существовала $C_p > 0$, такая, что
а) для любого интервала I

$$\frac{1}{\int_I \omega dx} \int_I \psi dx \left[\frac{1}{\int_I \omega dx} \int_I \left(\frac{\omega^p}{\psi} \right)^{\frac{1}{p-1}} dx \right]^{p-1} \leq C_p \quad (A_p^\omega),$$

где второй множитель при $p=1$ означает норму $\frac{\omega^p}{\psi}$ в L^∞ на интервале I ;

б) для любого $0 < a < \pi$ и $1 \leq i \leq s$

$$\frac{1}{a^{pa_i}} \int \psi dx \left[\int_{|x-x_i| > a} \left[\frac{\omega^p(x)}{\left| \sin \frac{x-x_i}{2} \right|^p \psi(x)} \right]^{\frac{1}{p-1}} dx \right]^{p-1} \leq C_p.$$

При $p > 1$ условия а) и б) теоремы 1 являются необходимыми и достаточными, чтобы система $\{\cos nx, \sin nx\}_{n=N}^\infty$ была базисом в $L^p(\psi dx)$. В настоящей работе рассматривается следующий вопрос: если для некоторой весовой функции $\psi(x)$ выполнены условия а) и б) теоремы 1 и ряд $\sum_{n=N}^\infty (a_n \cos nx + b_n \sin nx) r^n$ при $r \rightarrow 1$ — сходится в $L^p(\psi dx)$ к функции $f(x)$, то что можно сказать о сходимости в $L^p(\psi dx)$ при $r \rightarrow 1$ — сопряженного с ним ряда

$$\sum_{n=N}^\infty (a_n \sin nx - b_n \cos nx) r^n. \quad (1)$$

С помощью результатов работ (2,3) легко можно показать, что поставленный вопрос эквивалентен непрерывности в $L^p(\psi dx)$ следующего оператора:

$$-\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left[Q_r(t-x) - \sum_{i=1}^s \sum_{\lambda_i=0}^{a_i-1} Q_r^{(\lambda_i)}(x_i-x) T(x_i, \lambda_i, t) \right] dt, \quad (2)$$

где $Q_r(t) = r \sin t [1 - 2r \cos t + r^2]^{-1}$ сопряженное ядро Пуассона. При $r \rightarrow 1$ — сингулярный интеграл (2) стремится к функции

$$\tilde{f}(x) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left[\frac{1}{2 \operatorname{tg} \frac{t-x}{2}} - \sum_{i=1}^s \sum_{\lambda_i=0}^{a_i-1} \left(\frac{1}{2 \operatorname{tg} \frac{t-x}{2}} \right)_{t-x_i}^{(\lambda_i)} T(x_i, \lambda_i, t) \right] dt \quad (3)$$

в точках, где интеграл в правой части (3), взятый в смысле главного значения, существует. Запишем (3) в более удобной форме. Для этого воспользуемся следующей леммой.

Лемма 1. При вышеприведенных обозначениях справедливо следующее тождество:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2 \operatorname{tg} \frac{t-x}{2}} - \sum_{i=1}^s \sum_{\lambda_i=0}^{a_i-1} \left(\frac{1}{2 \operatorname{tg} \frac{t-x}{2}} \right)_{t-x_i}^{(\lambda_i)} T(x_i, \lambda_i, t) = \\ = \left(\prod_{i=1}^s \sin^{a_i} \frac{x-x_i}{2} \right)^{-1} \prod_{i=1}^s \sin^{a_i} \frac{t-x_i}{2}. \end{aligned}$$

Таким образом сопряженную функцию для функции $f \in L^p(\psi dx)$ можно определить следующим образом:

$$\tilde{f}(x) = -\frac{1}{\pi} \frac{1}{\prod_{i=1}^s \sin^{\alpha_i} \frac{x-x_i}{2}} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(t) \prod_{i=1}^s \sin^{\alpha_i} \frac{t-x_i}{2}}{2 \sin \frac{t-x}{2}} dt. \quad (4)$$

Из того, что $f \in L^p(\psi dx)$, легко следует, что $f(t) \prod_{i=1}^s \sin^{\alpha_i} \frac{t-x_i}{2}$ интегрируема. Откуда следует (см. (4), с. 214), что функция $\tilde{f}(x)$, определенная равенством (4), конечна почти всюду. Более того, используя известные результаты Р. Ханта, Б. Макенхаупта и Р. Уидена (5) для сопряженной функции и преобразования Гильберта, получаем следующую лемму.

Лемма 2. Пусть $\tilde{f}$ определяется равенством (4). Для того чтобы имело место неравенство

$$\|\tilde{f}\|_{L^p(\psi dt)} \leq B_p \|f\|_{L^p(\psi dx)}, \quad (5)$$

необходимо и достаточно, чтобы весовая функция удовлетворяла следующим условиям:

$$a') \quad \psi(t) = \left| \prod_{i=1}^s \sin^{\alpha_i} \frac{t-x_i}{2} \right|^p \omega(t); \quad \omega(t) \geq 0;$$

$$б') \quad \frac{1}{|\Delta|} \int_{\Delta} \omega dt \left[\int_{\Delta} [\omega(t)]^{-\frac{1}{p-1}} dt \right]^{p-1} \leq B_p$$

для любого интеграла Δ .

Сразу возникает вопрос, в каком соотношении находятся условия а') и б') леммы 2 с условиями а) и б) теоремы 1. Оказывается, что эти условия эквивалентны.

Лемма 3. Условия а) и б) теоремы 1 эквивалентны условиям а') и б') леммы 2.

Отметим, что для тех весовых функций $\psi(x)$, для которых подсистемы системы Хаара являются базисами в весовом пространстве $L^p(\psi dx)$ (см. (6)), получить подобную факторизацию $\psi(x)$ невозможно.

Из теоремы 1 и лемм 1—3 получаем следующий результат.

Теорема 2. Пусть $p > 1$ и весовая функция $\psi(x) \geq 0$ удовлетворяет условиям а'), б') леммы 2.

Тогда для любой функции $f(x) \in L^p(\psi dx)$ ее сопряженный тригонометрический ряд при $r \rightarrow 1$ — сходится в пространстве $L^p(\psi dx)$ к функции $\tilde{f}(x)$:

$$\sum_{n=N}^{\infty} (a_n \sin nx - b_n \cos nx) r^n \xrightarrow{L^p(\psi dx)} \tilde{f}(x),$$

где

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left[\cos nt - \sum_{i=1}^s \sum_{\lambda_i=0}^{\alpha_i-1} (\cos nt)^{(\lambda_i)}_{t=x_i} T(x_i, \lambda_i, t) \right] dt;$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left[\sin nt - \sum_{i=1}^s \sum_{\lambda_i=0}^{\alpha_i-1} (\sin nt)^{(\lambda_i)}_{t=x_i} T(x_i, \lambda_i, t) \right] dt.$$

Предположим, что весовая функция $\psi(x)$ удовлетворяет условиям а') и б') леммы 2. Пространство аналитических в единичном круге функций, для которых

$$\sup_{0 < r < 1} \int_0^{2\pi} |F(re^{it})|^p \psi(t) dt < +\infty, \quad (8)$$

обозначим через $H^p(\psi dt)$, а пространство тех функций из $H^p(\psi dt)$, для которых

$$F^{(j)}(0) = 0 \quad (j=0, 1, \dots, 2N-1), \quad (7)$$

где $2N-1 = \sum_{i=1}^s \alpha_i$, будем обозначать $\dot{H}^p(\psi dt)$. Введя еще одно обозначение

$$H_r(t) = \frac{1+re^{it}}{1-re^{it}},$$

ввиду того, что $\operatorname{Re} H_r(t) = P_r(t)$, $\operatorname{Im} H_r(t) = Q_r(t)$, из теорем 1 и 2 получаем следующий результат.

Теорема 3. Пусть $\psi(x)$ — весовая функция, удовлетворяющая условиям а') и б') леммы 2, $p > 1$ и $\dot{H}^p(\psi(t)dt)$ — пространство функций, удовлетворяющих условиям (6) и (7).

Тогда для того чтобы $F(z) \in H^p(\psi dt)$, необходимо и достаточно, чтобы существовала функция $f(t)$ на единичной окружности, для которой

$$F(re^{ix}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \left[H_r(x-t) - \sum_{i=1}^s \sum_{\lambda_i=0}^{\alpha_i-1} (-1)^{\lambda_i} \frac{\partial^{\lambda_i} H_r(x_i-t)}{\partial t^{\lambda_i}} T(x_i, \lambda_i, t) \right] dt.$$

Обозначая через $\Omega(\psi)$ линейную оболочку функций

$$\frac{\partial^{\lambda_i}}{\partial t^{\lambda_i}} H_r(x_i-t); \quad 1 \leq i \leq s, \quad 0 \leq \lambda_i \leq \alpha_i-1,$$

с помощью результатов, анонсированных в (7), можно доказать следующую теорему.

Теорема 4. Пусть $\psi(x)$ — весовая функция, удовлетворяющая условиям а') и б') леммы 2, $p > 1$ и $F(z) \in H^p(\psi dt)$. Тогда существуют функции $F_1(z)$, $F_2(z)$ такие, что

$$F_1(z) \in \dot{H}^p(\psi dt); \quad F_2(z) \in \Omega(\psi) \quad (8)$$

и $F(z) = F_1(z) + F_2(z)$. С другой стороны для любых функций $F_1(z)$, $F_2(z)$, удовлетворяющих (8), сумма $F_1(z) + F_2(z)$ принадлежит пространству $H^p(\psi dt)$.

Отметим, что первый шаг в развитии теории весовых пространств H^p был сделан М. Розенблумом (8). Дальнейшее развитие эта

теория получила в работе Дж. Гарсиа-Гуера ⁽⁹⁾. Результаты настоящей работы дают возможность исследовать такие весовые пространства $H^p(\psi dt)$, которые были неизвестны ⁽⁹⁾. Недавно опубликована работа Дж. Стромберга и Р. Уидена ⁽¹⁰⁾, в которой для весовых пространств H^p на вещественной оси были доказаны близкие к теоремам 3 и 4 результаты.

Институт математики
Академии наук Армянской ССР

Ղ. Ս. ՂԱԶԱՐՅԱՆ

Կշռային L^p տարածություններում համալուծ եռանկյունաչափական շարքերի հանրագումարումը ըստ Աբելի և կշռային H^p տարածություններ

Այն կշռային L^p , $1 < p < \infty$ տարածություններում, որտեղ եռանկյունաչափական սիստեմի ենթասիստեմները բազիս են հանդիսանում ⁽¹⁾, ուսումնասիրվել է համալուծ շարքերի զուգամիտությունը, գտնվել է համալուծ ֆունկցիայի տեսքը և ցույց է տրվել նրա անընդհատությունը այդ տարածություններում: Ստացված արդյունքները հնարավորություն են տվել ուսումնասիրելու այնպիսի կշռային H^p , $1 < p < \infty$ տարածություններ, որոնց ուսումնասիրությունը մինչ այժմ (տե՛ս ⁽⁹⁾) համարվում էր անհնար:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ К. С. Казарян, ДАН АрмССР, т. 71, № 5 (1980). ² К. С. Казарян, Anal. Math., v. 4, № 1 (1978). ³ К. С. Казарян, ДАН АрмССР, т. 69, № 5 (1979). ⁴ А. Зигмунд, Тригонометрические ряды, Мир, М., 1965. ⁵ R. Hunt, B. Mackenhaupt, R. Wheeden TAMS, v. 176 (1973). ⁶ К. S. Kazarian, Studia Math., v. 71, № 3 (1982). ⁷ К. С. Казарян, Сб. докл. VII Сов.-Чехосл. семинара, 1982. ⁸ М. Rosenblum, TAMS, v. 105, № 1 (1962). ⁹ J. Garsia-Guerua, Dissert., Math., v. 162 (1979). ¹⁰ J. Stromberg, R. Wheeden, TAMS v. 270, № 2 (1982).