

УДК 517.984.5

МАТЕМАТИКА

И. Г. Хачатрян

Необходимые и достаточные условия разрешимости обратной задачи рассеяния для дифференциальных операторов высших порядков на полуоси

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашьяном 31/VIII 1982)

Пусть L — некоторый самосопряженный оператор в $L^2(0, \infty)$, порожденный самосопряженным по Лагранжу дифференциальным выражением

$$l[y] \equiv (-1)^n y^{(2n)} + \sum_{k=0}^{2n-2} q_k(x) y^{(k)}, \quad 0 < x < \infty, \quad (1)$$

где $n > 1$, а коэффициенты $q_k(x)$ — комплекснозначные функции, голоморфные в секторе

$$|\arg z| < \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2n} \quad (2)$$

и удовлетворяющие условиям

$$\int_0^\infty x^{2n-1-k+v} \left\{ \sup_{\operatorname{Re} z = x} |q_k^{(v)}(z)| \right\} dx < \infty, \quad 0 \leq v \leq k \leq 2n-2. \quad (3)$$

В работах (1,2) автором рассмотрена обратная задача рассеяния, состоящая в восстановлении оператора L по набору данных рассеяния

$$\{T, N(\lambda) \ (\lambda \in T), \ S(\lambda) \ (\lambda > 0)\}, \quad (4)$$

где T — множество всех тех чисел λ ($\lambda > 0$ или $\arg \lambda = -\pi/2n$), для которых числа λ^{2n} являются собственными значениями оператора L , а $N(\lambda)$ и $S(\lambda)$ — матрицы

$$N(\lambda) = \|N_{kj}(\lambda)\|_{k,j=1}^n, \quad \lambda \in T, \quad (5)$$

$$S(\lambda) = \|S_{kj}(\lambda)\|_{k,j=0}^n, \quad \lambda > 0, \quad (6)$$

являющиеся определенными спектральными характеристиками точечного и непрерывного спектров оператора L . В указанных работах выводится аналог интегрального уравнения Гельфанда — Левитана — Марченко (3,4), тем самым доказывается единственность решения обратной задачи и указывается процедура восстановления оператора L по данным рассеяния (4).

В настоящей заметке указываются необходимые и достаточные

условия, при которых наперед заданный набор данных (4) является набором данных рассеяния некоторого самосопряженного дифференциального оператора L с коэффициентами, удовлетворяющими условиям (3).

Перечислим эти условия.

1°. $T = T^- \cup T^+$, где T^- — конечное множество точек на открытом луче $\arg \lambda = -\pi/2n$ ($n > 1$ — фиксированное натуральное число), а T^+ — множество точек на полуоси $(0, \infty)$, не имеющее отличной от нуля конечной точки сгущения (при $n=2$ множество T^+ конечно). Кроме того,

$$\sum_{\lambda \in (0,1) \cap T} \lambda^{n/2} + \sum_{\lambda \in (1,\infty) \cap T} \lambda^{-n/2} < \infty.$$

2°. При каждом $\lambda \in T$ $N(\lambda)$ есть отличная от нуля эрмитова не-отрицательная матрица (5), причем $N_{kn}(\lambda) = N_{nk}(\lambda) = 0$ ($k=1, 2, \dots, n$) при $\lambda \in T^+$.

3°. При каждом $\lambda > 0$ $S(\lambda)$ есть матрица (6) с элементами

$$S_{kj}(\lambda) = \frac{1}{2\pi} S_k(\lambda) \bar{S}_j(\lambda), \quad k, j=0, 1, \dots, n,$$

причем все функции $S_k(\lambda)$ имеют на полуоси $(0, \infty)$ непрерывные производные первого порядка и $|S_0(\lambda)| = S_n(\lambda) = 1$.

4°. Функция

$$\begin{aligned} \tilde{F}(x, t) = & \int_0^\infty \int_0^x \int_0^t \sum_{k,j=0}^n S_{kj}(\lambda) e^{i\omega_k \lambda \xi} e^{-i\bar{\omega}_j \bar{\lambda} \eta} d\eta d\xi d\lambda + \\ & + \sum_{\lambda \in T} \int_0^x \int_0^t \sum_{k,j=1}^n N_{kj}(\lambda) e^{i\omega_k \lambda \xi} e^{-i\bar{\omega}_j \bar{\lambda} \eta} d\eta d\xi, \end{aligned}$$

где интеграл и ряд сходятся в обычном смысле при любых $x, t \in [0, \infty)$ непрерывна в области $0 \leq x, t < \infty$. Разность $\tilde{F}(x, t) - \min\{x, t\}$ имеет в области $0 \leq x, t < \infty$ непрерывные частные производные первого порядка, а в области $0 \leq x, t < \infty, x+t \neq 0$ — непрерывные частные производные второго порядка. Функция (аналог ядра Гельфанда—Левитана—Марченко)

$$F(x, t) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} [\tilde{F}(x, t) - \min\{x, t\}]$$

имеет в области $0 < x, t < \infty$ непрерывные частные производные до $(2n-1)$ -го порядка включительно.

5°. Функция $F_0(z, \xi) = F(z, z+\xi)$ и все ее частные производные до $(2n-1)$ -го порядка включительно при каждом фиксированном $\xi \geq 0$ по переменной z аналитически продолжаются с полуоси $(0, \infty)$ в сектор (2) и удовлетворяют неравенствам

$$\left| \frac{\partial^k F_0(z, \xi)}{\partial z^j \partial \xi^{k-j}} \right| \leq \frac{1}{x^k} h_k \left(x + \frac{\xi}{2} \right), \quad 0 \leq j \leq k \leq 2n-1,$$

$$\int_0^{\infty} \left| \frac{\partial}{\partial z} F_0(z, \xi) \right| d\xi \leq h(x), \quad x = \operatorname{Re} z,$$

где $h(x)$ и $h_k(x)$ ($0 \leq k \leq 2n-2$) — невозрастающие и вместе с $h_{2n-1}(x)$ суммируемые на полуоси $(0, \infty)$ функции.

6°. При каждом z из замкнутого сектора (2) оператор $I + G_z$ обратим в $L^2(0, \infty)$, где I — единичный оператор, а G_z — интегральный оператор с ядром

$$G(z; x, t) = \begin{cases} F_0(z+x, t-x) & \text{при } 0 < x \leq t < \infty, \\ \bar{F}_0(\bar{z}+t, x-t) & \text{при } 0 < t \leq x < \infty. \end{cases}$$

7°. Замыкание в $L^2(0, \infty)$ линейной оболочки всех функций

$$\sum_{k=1}^n N_{kj}(\lambda) e^{i\omega_k \lambda x}, \quad \lambda \in T, \quad j=1, 2, \dots, n, \quad (7)$$

не содержит отличного от нуля элемента, ортогонального к нулевому подпространству оператора $I + F_S$, где F_S — интегральный оператор с ядром

$$F_S(x, t) = F(x, t) - \sum_{\lambda \in T} \sum_{k,j=1}^n N_{kj}(\lambda) e^{i\omega_k \lambda x} e^{-i\bar{\omega}_j \bar{\lambda} t} \quad (8)$$

8°. Оператор $I + A$ обратим в $L^2(0, \infty)$, где A — интегральный оператор с ядром

$$A(\lambda, \mu) = -\frac{1}{2\pi i} \sum_{k,j=0}^n \frac{S_k(\lambda) \bar{S}_j(\mu)}{\omega_k \lambda - \bar{\omega}_j \mu}, \quad 0 < \lambda, \mu < \infty.$$

Сформулируем теперь основной результат настоящей заметки.

Теорема. *Чтобы данные (4) были данными рассеяния некоторого самосопряженного оператора L , порожденного в $L^2(0, \infty)$ самосопряженным дифференциальным выражением вида (1) с голоморфными в секторе (2) и удовлетворяющими условиям (3) коэффициентами, необходимо и достаточно выполнение условий 1°—8°.*

При доказательстве теоремы используются результаты работ (2,5).

Замечание 1. В условии 3° вместо гладкости достаточно предполагать непрерывность функций $S_k(\lambda)$.

Замечание 2. Из условий 1°—5° уже следует обратимость оператора $I + G_z$ для всех значений z вне некоторого ограниченного множества, не имеющего точки сгущения внутри сектора (2) и не содержащего точки из полуоси $(0, \infty)$.

Замечание 3. Сходимость ряда в (8) и ограниченность операторов F_S и A следуют из условий 1°—5°.

Замечание 4. Из обратимости оператора $I + G_0$ следует, что нулевое подпространство оператора $I + F_S$ также не содержит отличного от нуля элемента, ортогонального к линейной оболочке функций (7).

Замечание 5. В случае конечности множества T вместо условия 7° достаточно предполагать, что линейная оболочка функций

(7) и нулевое подпространство оператора $I+F_S$ имеют одинаковую размерность.

Кроме указанных в замечаниях 1, 2 и 5 связей, в остальном условия $1^\circ-8^\circ$ независимы. В связи с этим отметим, что в случае $n=1$ из условий $1^\circ-5^\circ$ следует еще обратимость одного из операторов $I+F_S$ и $I+A$, а свойство 6° , как доказано в (4), является следствием условий $1^\circ-5^\circ$ и указанного в замечании 5 условия.

Укажем еще несколько свойств данных рассеяния (4).

Ранг матрицы $N(\lambda)$ совпадает с кратностью собственного значения λ^{2n} оператора L и может равняться $n-1$ лишь для конечного числа значений λ . Кроме того, существуют независимые от λ числа $c_1 > c_2 > 0$ такие, что

$$c_2 \lambda < \max_{1 \leq k, j \leq n} |N_{kj}(\lambda)| < c_1 \lambda, \quad \lambda \in T^+.$$

Для оператора L , порожденного краевыми условиями $y^{(k)}(0)=0$ ($k=0, 1, \dots, n-1$), а в случае регулярного (6) конца $x=0$ для любого оператора L , множество T^+ ограничено и все функции $S_k(\lambda)$ стремятся к конечным пределам при $\lambda \rightarrow +\infty$, причем эти пределы не зависят от коэффициентов $q_k(x)$, удовлетворяющих указанным условиям.

В заключение автор благодарит В. Б. Лидского за полезные обсуждения результатов.

Институт математики

Академии наук Армянской ССР

Ի. Գ. ԽԱՉԱՏՐՅԱՆ

Կիսառանցքի վրա բարձր կարգի դիֆերենցիալ օպերատորների համար ցրման հակադարձ խնդրի լուծելիության անհրաժեշտ և բավարար պայմաններ

$L^2(0, \infty)$ տարածությունում դիտարկվում է $2n$ կարգի ինքնահամալուծ L դիֆերենցիալ օպերատորը, որի գործակիցները հոլոմորֆ ֆունկցիաներ են $|\arg z| < \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2n}$ անկյունային տիրույթում և որոշ արագությամբ ձգտում են զրոյի, երբ $|z| \rightarrow \infty$: Բերվում են անհրաժեշտ և բավարար պայմաններ, որոնց դեպքում նախորոք տրված տվյալները հանդիսանում են ցրման տվյալներ նշված տիպի L օպերատորի համար:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ И. Г. Хачатрян, ДАН АрмССР, т. 70, № 3 (1980). ² И. Г. Хачатрян, Функци. анализ, т. 17, № 1 (1983). ³ И. М. Гельфанд, Б. М. Левитан, Изв. АН СССР. Сер. мат., т. 15, № 4 (1951). ⁴ В. А. Марченко, Операторы Штурма—Лнувилля и их приложения, Наукова думка, Киев, 1977. ⁵ И. Г. Хачатрян, Изв. АН АрмССР. Сер. мат., т. 14, № 6 (1979). ⁶ М. А. Наймарк, Линейные дифференциальные операторы, Наука, М., 1969.