ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
LXXVII 1983 2

УДК 519.4

МАТЕМАТИКА

Ю. М. Мовсисян

Котождества в алгебрах

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. В. Амбарцумяном 28/VI 1982)

Будем говорить, что в алгебре $\langle Q; \Sigma \rangle$ выполняется котождество $w_1 = w_2$, если равенство $w_1 = w_2$ истинно при некоторых фиксированных значениях предметных переменных (аргументов) и при любых (допустимых) значениях символов операций (функциональных переменных) ([1]). Говоря формально, тождества, сверхтождества и котождества—формулы с кванторными приставками (соответственно) вида:

$$\exists X_1, \ldots, X_m \ \forall x_1, \ldots, x_k \ (w_1 = w_2); \qquad \text{(T)}$$

$$\forall X_1, \ldots, X_m \ \forall x_1, \ldots, x_k \ (w_1 = w_2); \qquad \text{(CT)}$$

$$\exists x_1, \ldots, x_k \ \forall X_1, \ldots, X_m \ (w_1 = w_2), \qquad \text{(KT)}$$

где $X_1, \ldots, X_m$—все символы операции, а $x_1, \ldots, x_k$—все предметные переменные в термах w_1, w_2.

Котождество (сверхтождество) называется нетривиальным, если оно содержит более одного символа операции, т. е. $m > 1$.

Рассмотрим следующие уравновешенные сверхтождества длины 4:

$$X[x, Y[y, X(z, u)]] = X[X[Y(x, y), z], u]; \qquad (1)$$

$$X[x, X[y, Y(z, u)]] = Y[Y[Y(x, y), z], u]; \qquad (2)$$

$$X[x, X[y, X(z, u)]] = Y[Y[Y(x, y), z], u]. \qquad (3)$$

Очевидно, что из сверхтождеств (1)—(3) соответственно вытекают следующие сверхтождества Муфанг:

$$X[x, Y[y, X(x, z)]] = X[X[Y(x, y), x], z]; \qquad (1')$$

$$X[x, X[y, Y(x, z)]] = Y[Y[Y(x, y), x], z]; \qquad (2')$$

$$X[x, X[y, X(x, z)]] = Y[Y[Y(x, y), x], z]. \qquad (3')$$

Бинарная алгебра $\langle Q; \Sigma \rangle$ называется обратимой, если для любой операции $A \in \Sigma$ группоид $Q(A)$—квазигруппа, и с луповой операцией, если относительно некоторой операции $B \in \Sigma$ множество Q—лупа. Подалгебра $\langle Q'; \Sigma \rangle$ алгебры $\langle Q; \Sigma \rangle$ называется лупообразной, если относительно любой операции $A \in \Sigma$ подмножество Q'—лупа.

Теорема 1. *Если в обратимой алгебре* $\langle Q; \Sigma \rangle$ *с луповой операцией выполняется сверхтождество* (1') (*или* (2'), (3')), *тогда из тождества ассоциативности*

$$A[x, B(y, z)] = C[D(x, y), z]$$

вытекает сверхтождество (1) (соответственно (2), (3)).

Понятие котождества приводит к двойственному результату.

Теорема 2. *Если в обратимой алгебре* $\langle Q; \Sigma \rangle$ *с луповой операцией выполняется сверхтождество* (1′) (или (2′), (3′)), *тогда из нетривиального котождества ассоциативности*

$$X[a, Y(b, c)] = Z[U(a, b), c] \qquad (*)$$

вытекает, что в (лупообразной) подалгебре $\langle Q'; \Sigma \rangle$, *порожденной элементами* $a, b, c \in Q$, *выполняется уравновешенное сверхтождество* (1) (соответственно (2), (3)).

Нетрудно заметить, что теорема 2 содержит известную теорему Муфанг (в случае одноэлементного множества Σ) [2].

Теорема Муфанг содержится и в любом из следующих утверждений.

Следствие 1. *Если в обратимой алгебре* $\langle Q; \Sigma \rangle$ *с луповой операцией выполняется система сверхтождеств*

$$X[x, Y[y, X(x, z)]] = X[Y[X(x, y), x], z],$$

$$X[Y(x, y), x] = Y[X(x, y), x],$$

то из нетривиального котождества ассоциативности (*) *вытекает, что в (лупообразной) подалгебре* $\langle Q'; \Sigma \rangle$, *порожденной элементами* $a, b, c \in Q$, *выполняется уравновешенное сверхтождество* (1).

Следствие 2. *Если в обратимой алгебре* $\langle Q; \Sigma \rangle$ *с луповой операцией выполняется система сверхтождеств*

$$X[x, X[y, Y(x, z)]] = Y[X[X(x, y), x], z];$$

$$X[x, Y(x, y)] = Y[x, X(x, y)],$$

то из нетривиального котождества ассоциативности (*) *вытекает, что в (лупообразной) подалгебре* $\langle Q'; \Sigma \rangle$, *порожденной элементами* $a, b, c \in Q$, *выполняется уравновешенное сверхтождество* (1).

Следствие 3. *Если в обратимой алгебре* $\langle Q; \Sigma \rangle$ *с луповой операцией выполняется система сверхтождеств*

$$Y[x, X[y, X(x, z)]] = Y[X[X(x, y), x], z];$$

$$X[Y(x, y), x] = Y[X(x, y), x],$$

то из нетривиального котождества ассоциативности (*) *вытекает, что в (лупообразной) подалгебре* $\langle Q'; \Sigma \rangle$, *порожденной элементами* $a, b, c \in Q$, *выполняется уравновешенное сверхтождество* (1).

Следствие 4. *Если в обратимой алгебре* $\langle Q; \Sigma \rangle$ *с луповой операцией выполняется система сверхтождеств*

$$X[X[Y(z, x), y], x] = Y[z, X[x, X(y, x)]];$$

$$X[Y(x, y), x] = Y[X(x, y), x],$$

то из нетривиального котождества ассоциативности (*) *вытекает, что в (лупообразной) подалгебре* $\langle Q'; \Sigma \rangle$, *порожденной* *элементами $a, b, c \in Q$, выполняется уравновешенное сверхтождество* (1).

Следствие 5. *Если в обратимой алгебре $\langle Q; \Sigma \rangle$ с луповой операцией выполняется система сверхтождеств*

$$X[x, X[X(y, z), x]] = Y[Y(x, y), Y(z, x)];$$

$$X[Y(x, y), x] = Y[X(x, y), x],$$

то из нетривиального котождества ассоциативности (*) *вытекает, что в (лупообразной) подалгебре $\langle Q'; \Sigma \rangle$, порожденной элементами $a, b, c \in Q$, выполняется уравновешенное сверхтождество* (3).

Поскольку в классе всех обратимых алгебр уравновешенные сверхтождества (1) и (2) соответственно эквивалентны сверхтождествам ассоциативности [3]

$$X[x, Y(y, z)] = X[Y(x, y), z], \tag{1''}$$

$$X[x, X(y, z)] = Y[Y(x, y), z], \tag{2''}$$

то вместо сверхтождеств (1) и (2) можно говорить и о соответствующих сверхтождествах ассоциативности. Кроме того, рассматриваемые сверхтождества Муфанг можно заменять их эквивалентными или более сильными сверхтождествами. Например, можно доказать, что в классе всех обратимых алгебр с луповой операцией из сверхтождества

$$X[Y(x, x), Y(y, z)] = X[X(y, x), X(x, z)]$$

вытекают сверхтождества Муфанг (1′) и (2′). Далее, из сверхтождеств

$$X[X(x, x), Y(y, z)] = X[Y(x, y), X(x, z)], \tag{4}$$

$$X[X(x, x), X(y, z)] = Y[X(x, y), Y(x, z)] \tag{5}$$

соответственно вытекают сверхтождества (1′) и (2′) и т. д.

Однако в случае последних двух сверхтождеств (4), (5) заключения теорем 1, 2 верны не только для сверхтождеств ассоциативности (1″), (2″), но и соответственно для следующих более сильных сверхтождеств [4]:

$$X[x, Y(y, z)] = X[y, Y(z, x)]$$

$$X[x, X(y, z)] = Y[y, Y(z, x)].$$

Ереванский государственный университет

ՅՈՒ. Մ. ՄՈՎՍԻՍՅԱՆ

Կոնույնությունները հանրահաշիվներում

Աշխատանքում հետազոտվում է կոնույնության գաղափարը. ստացվում են թեորեմ 1 և թեորեմ 2 երկակի արդյունքները։

Կոնույնությունը՝ երկու բառերի հավասարություն է, որը իր մեջ մտնող առարկայական փոփոխականների սևեռված արժեքների դեպքում ճիշտ է ֆունկցիոնալ փոփոխականների ցանկացած թույլատրելի արժեքների համար։ Այլ կերպ՝ կոնույնության մեջ առարկայական փոփոխականները կապված են գոյության քվանտորով, իսկ ֆունկցիոնալ փոփոխականները (կամ գործողության նշանները)՝ ընդհանրության քվանտորով։

Հոդվածի հիմնական արդյունքը (թեորեմ 2), ինչպես և նրա հետևությունները, որպես մասնավոր դեպք պարունակում է Մուֆանգի դասական թեորեմը ([2])։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Ю. М. Мовсисян*, Научный работник, 2 (18) (1973). [2] *R. H. Bruck*, A survey of binary systems, Berlin-Heidelberg-Gottingen, Springer Verlag, 1958. [3] *Ю. М. Мовсисян*, ДАН АрмССР, т. 62, № 5 (1976). [4] *Ю. М. Мовсисян*, ДАН АрмССР, т. 76, № 2 (1983).