ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXVII 1983 1

УДК 539.3.01 517.944

МЕХАНИКА

С. С. Заргарян

Об асимптотике решений системы сингулярных интегральных уравнений, порожденной уравнениями Ламе, в окрестности угловых точек контура

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР О. М. Сапонджяном 2/XII 1982)

Определение асимптотики решений интегральных уравнений вблизи угловых точек контура представляет значительный теоретический интерес и оказывается полезным и эффективным при численной реализации их решений (см. ([1])).

В настоящей работе получена асимптотика решений системы сингулярных интегральных уравнений плоской задачи теории упругости вблизи угловых точек контура. Рассматривается система интегральных уравнений теории потенциала, которая получается при решении первой краевой задачи для системы уравнений Ламе. Для определения асимптотики решений интегральных уравнений применяется метод, использованный ранее в ([2]) для исследования асимптотики решений интегральных уравнений теории логарифмического потенциала со смешанными краевыми условиями. Здесь мы рассматриваем первую внутреннюю задачу плоской теории упругости, когда на контуре заданы смещения.

Пусть $\partial\Omega$ простая замкнутая кусочно-гладкая кривая с конечным числом угловых точек $p_1, p_2, \ldots p_m$. Обозначим через $\Omega^{(i)}$ ограниченную область, расположенную внутри, а через $\Omega^{(e)}$ область, внешнюю по отношению к $\partial\Omega$. Раствор угла между полукасательными в точке p_j со стороны области $\Omega^{(i)}$ обозначим $2\alpha_j$. Допустим, что $0<\alpha_j<\pi$ при $j=1, 2, \ldots m$.

Как известно, решение плоской задачи теории упругости при заданных на границе смещениях сводится к решению следующей краевой задачи для системы Ламе:

$$Au^{(i)}\equiv\mu\Delta\vec{u}^{(i)}+(\lambda+\mu)\nabla\operatorname{div}\vec{u}^{(i)}=0 \text{ в } \Omega^{(i)}, \quad \vec{u}^{(i)}/_{\partial\Omega}=\vec{g}, \tag{1}$$

где λ и μ — коэффициенты Ламе.

Решение задачи (1.1) будем искать в виде обобщенного упругого потенциала двойного слоя ([3])

$$(W\vec{\varphi})(x)=\int\limits_{\partial\Omega}[T(\partial_y, n)\Gamma(y-x)]^*\vec{\varphi}(y)d_ys, \tag{2}$$

где $\vec{\varphi}$ — искомая вектор-функция, $\Gamma(y-x)$ — (2×2) матрица Кельвина—

Сомильяна с элементами $\Gamma_{ij}=a\delta_{ij}\log r^{-1}+b[(y_i-x_i)(y_j-x_j)]/r^2$, $T(\partial_y, n)$—матричный дифференциальный оператор с элементами $T_{ij}=\lambda n_j(y)\partial/\partial y_j+\mu n_i(y)\partial/\partial y_i+\mu\delta_{ij}\partial/\partial n$, $i, j=1, 2$; $a=(\lambda+3\mu)/2\pi\mu(\lambda+2\mu)$, $b=(\lambda+\mu)/2\pi\mu(\lambda+2\mu)$, $n=\{n_1, n_2\}$—единичная нормаль в точке контура, знак $*$ означает переход к сопряженной матрице.

Учитывая граничные свойства потенциала (2), получаем систему сингулярных интегральных уравнений [4]

$$-\vec{\varphi}(x)+\int_{\partial\Omega}[T(\partial_y, n)\Gamma(y-x)]^*\vec{\varphi}(y)d_ys=\vec{g}(x), \quad x\in\partial\Omega\setminus\bigcup_j p_j, \tag{3}$$

разрешимость которой в весовых классах Гельдера исследована в [5]. Ниже при нахождении асимптотики мы не будем уточнять пространства, которым принадлежат рассматриваемые функции, и для простоты будем считать вектор $\vec{g}$ гладким.

Выразим решение системы (3) через решение некоторой вспомогательной задачи. Обозначим через $v^{(e)}$ решение задачи

$$Av^{(e)}=0 \text{ в } \Omega^{(e)}, \quad T(\partial_x, n)v^{(e)}/_{\partial\Omega}=(T(\partial_x, n)u^{(i)}-T(\partial_x, n)u^{(e)}/_{\partial\Omega}, \tag{4}$$

стремящееся к нулю на бесконечности.

Пусть $u^{(e)}$ решение задачи

$$Au^{(e)}=0 \text{ в } \Omega^{(e)}, \quad u^{(e)}/_{\partial\Omega}=\vec{g}. \tag{5}$$

На основании формулы Бетти будем иметь при $x\in\partial\Omega\setminus Up_j$

$$\vec{u}^{(i)}(x)=-\int_{\partial\Omega}\vec{u}^{(i)}(y)[T(\partial_y, n)\Gamma(y-x)]^*d_ys+\int_{\partial\Omega}\Gamma(y-x)T(\partial_y, n)\vec{u}^{(i)}(y)d_ys; \tag{6}$$

$$\vec{u}^{(e)}(x)=\int_{\partial\Omega}\vec{u}^{(e)}(y)[T(\partial_y, n)\Gamma(y-x)]^*d_ys-\int_{\partial\Omega}\Gamma(y-x)T(\partial_y, n)\vec{u}^{(e)}(y)d_ys+2\vec{u}^{(e)}(\infty). \tag{7}$$

Складывая (6) и (7), находим

$$2\vec{g}=\int_{\partial\Omega}\Gamma(y-x)[T(\partial_y, n)\vec{u}^{(i)}(y)-T(\partial_y, n)\vec{u}^{(e)}(y)]d_ys+2\vec{u}^{(e)}(\infty), \tag{8}$$

где $\vec{u}^{(e)}(\infty)$—предельное значение вектора $u^{(e)}$ на бесконечности.

Учитывая, что решение задачи (4) при $x\in\partial\Omega\setminus\bigcup_j p_j$ имеет представление

$$\vec{v}^{(e)}(x)=\int_{\partial\Omega}\vec{v}^{(e)}(y)[T(\partial_y, n)\Gamma(y-x)]^*d_ys-\int_{\partial\Omega}\Gamma(y-x)T(\partial_y, n)\vec{v}^{(e)}(y)d_ys, \tag{9}$$

принимая во внимание (8) и равенство

$$\int_{\partial\Omega}[T(\partial_y, n)\Gamma(y-x)]^*d_ys=E, \quad x\in\partial\Omega\setminus p_j,$$

где E—единичная матрица, получаем

$$\vec{\varphi} = \frac{1}{2}\left(\vec{v}^{(e)} - \vec{u}^{(e)}(\infty)\right). \tag{10}$$

Для простоты предположим, что вблизи точки p_j область совпадает с сектором $\{x_1 + ix_2 = \rho e^{i\theta};\ 0 < \rho < \delta,\ -\alpha < \theta < \alpha\}$.

Рассмотрим случай $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. При $x \in \Omega^{(i)}$ и $\rho \to 0$

$$u^{(i)} = \vec{g}(0) + \frac{\partial \vec{g}}{\partial x_1}(0)x_1 + \frac{\partial \vec{g}}{\partial x_2}(0)x_2 + \vec{O}(\rho^{1+\varepsilon}), \quad \varepsilon > 0. \tag{11}$$

Аналогично при $x \in \Omega^{(e)}$

$$u^{(e)} = \vec{g}(0) + \vec{e}_\rho d\rho^{\lambda_u}\left\{\frac{\sin(\lambda_u - 1)(\pi - \alpha)}{\sin(\lambda_u + 1)(\pi - \alpha)}\sin(\lambda_u + 1)\theta - \sin(\lambda_u - 1)\theta\right\} +$$

$$+ \vec{e}_\theta \nu_2 d\rho^{\lambda_u}\left\{-\frac{\cos(\lambda_u - 1)(\pi - \alpha)}{\cos(\lambda_u + 1)(\pi - \alpha)}\cos(\lambda_u + 1)\theta + \cos(\lambda_u - 1)\theta\right\} +$$

$$+ \frac{\partial \vec{g}}{\partial x_1}(0)x_1 + \frac{\partial \vec{g}}{\partial x_2}(0)x_2 + \vec{O}(\rho^{1+\varepsilon}), \qquad \nu_2 = \frac{\varkappa + \lambda_u}{\varkappa - \lambda_u}, \tag{12}$$

где $\varkappa$ — упругая постоянная, равная $3 - 4\nu$ при плоской деформации; ν — коэффициент Пуассона; λ_u — корень уравнения $\varkappa\sin 2\lambda(\pi - \alpha) + \lambda \sin 2(\pi - \alpha) = 0$ с наименьшей положительной действительной частью. Случай кратных корней λ_u не рассматривается.

Так как вектор-функции (11) и (12) можно дифференцировать, то, вычисляя оператор напряжений $T(\partial_u, n)$ при $x \in \partial\Omega \setminus p_j$, $\rho \to 0$ и решая задачу (4), получаем

$$v^{(e)} \sim v^{(e)}(0) + \vec{e}_\rho B\rho^{\lambda_t}\left\{\frac{\lambda_t + 1}{\varkappa - \lambda_t}\,\frac{\cos(\lambda_t - 1)(\pi - \alpha)}{\cos(\lambda_t + 1)(\pi - \alpha)}\cos(\lambda_t + 1)\theta +\right.$$

$$\left. + \cos(\lambda_t - 1)\theta\right\} + \vec{e}_\theta(\varkappa - \lambda_t)^{-1}B\rho^{\lambda_t}\left\{-(\lambda_t - 1)\frac{\sin(\lambda_t - 1)(\pi - \alpha)}{\sin(\lambda_t + 1)(\pi - \alpha)}\sin(\lambda_t + 1)\theta +\right.$$

$$\left. + (\varkappa + \lambda_t)\sin(\lambda_t - 1)\theta\right\}, \quad -(\pi - \alpha) \leqslant \theta \leqslant \pi - \alpha, \tag{13}$$

где λ_t корень уравнения $\sin 2\lambda(\pi - \alpha) + \lambda \sin 2(\pi - \alpha) = 0$ с наименьшей действительной частью. Доказывается, что $\lambda_t < \lambda_u$, если $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Поэтому в главном члене асимптотики (13) участвует число λ_t. Итак, при $r \to 0$ на основании (10) имеем

$$\vec{\varphi} - \vec{\varphi}(0) \sim \vec{e}_\rho \frac{1}{2} B\rho^{\lambda_t}\left[\frac{\lambda_t + 1}{\varkappa - \lambda_t} + 1\right]\cos(\lambda_t - 1)(\pi - \alpha) +$$

$$+ \vec{e}_\theta \frac{1}{2}\rho^{\lambda_t}B\left[\mp\frac{\lambda_t - 1}{\varkappa - \lambda_t} \pm \nu_1\right]\sin(\lambda_t - 1)(\pi - \alpha), \quad \nu_1 = \frac{\varkappa + \lambda_t}{\varkappa - \lambda_t}. \tag{14}$$

Здесь во второй скобке верхние знаки соответствуют лучу $\theta = \pi - \alpha$, а нижние — лучу $\theta = -(\pi - \alpha)$.

Постоянную B будем определять методом, предложенным в ([6]). Применяя формулу Бетти к вектор-функциям $\vec{v}^{(e)}$ и $\vec{\zeta}^{(e)}$ по области

$\Omega_\varepsilon^{(e)}=\Omega^{(e)}\cap|y-x|>\varepsilon$ при $x=p_j$ и $\varepsilon\to 0$, где $\vec{v}^{(e)}$ определяется по (13), а $\vec{\zeta}^{(e)}$ — решение задачи

$$A\vec{\zeta}^{(e)}=0 \text{ в } \Omega^{(e)}, \quad T(\partial_x, n)\vec{\zeta}^{(e)}=0 \text{ на } \partial\Omega\setminus p_j, \tag{15}$$

имеющее асимптотику

$$\vec{\zeta}^{(e)}\sim\vec{e}_\rho\rho^{-\lambda_t}\left\{-\frac{\lambda_t-1}{\varkappa+\lambda_t}\,\frac{\cos(\lambda_t+1)(\pi-\alpha)}{\cos(\lambda_t-1)(\pi-\alpha)}\cos(\lambda_t-1)\theta+\cos(\lambda_t+1)\theta\right\}+$$

$$+\vec{e}_\theta(\varkappa+\lambda_t)^{-1}\rho^{-\lambda_t}\left\{-(\lambda_t+1)\,\frac{\sin(\lambda_t+1)(\pi-\alpha)}{\sin(\lambda_t-1)(\pi-\alpha)}\sin(\lambda_t-1)\theta-(\varkappa-\lambda_t)\sin(\lambda_t+1)\theta\right\},$$

получаем

$$B=k_1^{-1}(\alpha)\int_{\partial\Omega}\vec{\zeta}^{(e)}T(\partial_y, n)\vec{u}^{(i)}d_ys.$$

Продолжая вектор-функцию $\vec{\zeta}^{(e)}$ в область $\Omega^{(i)}$, решением задачи $A\vec{z}^{(i)}=0$ в $\Omega^{(i)}$, $\vec{z}^{(i)}=\vec{\zeta}^{(e)}$ на $\partial\Omega\setminus\bigcup_j p_j$ получаем

$$B=k_1^{-1}(\alpha)\int_{\partial\Omega}(\vec{g}-\vec{g}(0))\,T(\partial_y, n)\vec{z}^{(i)}d_ys. \tag{16}$$

Формулы (14) и (16) определяют главный член асимптотики вектор-функции $\vec{\varphi}-\vec{\varphi}(0)$ в случае $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$.

Пусть теперь $\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$.

При $x\in\Omega^{(i)}$ и $\rho\to 0$ решения задач (1) и (5) имеют асимптотику

$$\vec{u}^{(i)}=\vec{g}(0)+\vec{e}_\rho G\rho^{\lambda_u}\left\{\frac{\sin(\lambda_u-1)\alpha}{\sin(\lambda_u+1)\alpha}\sin(\lambda_u+1)\theta-\sin(\lambda_u-1)\theta\right\}+$$

$$+\vec{e}_\theta G\rho^{\lambda_u}\left\{\frac{\sin(\lambda_u-1)\alpha}{\sin(\lambda_u+1)\alpha}\cos(\lambda_u+1)\theta+\nu_2\cos(\lambda_u-1)\theta\right\}+$$

$$+\frac{\partial\vec{g}}{\partial x_1}(0)x_1+\frac{\partial\vec{g}}{\partial x_2}(0)x_2+O(\rho^{1+\varepsilon}), \tag{17}$$

$$\vec{u}^{(e)}=\vec{g}(0)+\frac{\partial\vec{g}}{\partial x_1}(0)x_1+\frac{\partial\vec{g}}{\partial x_2}(0)x_2+O(\rho^{1+\varepsilon}),\quad \varepsilon>0. \tag{18}$$

Решая задачу (4), учитывая дифференцируемость вектор-функций (17) и (18), при $x\in\partial\Omega\setminus p_j$ и $\rho\to 0$ получаем

$$\vec{v}^{(e)}\sim\vec{v}^{(e)}(0)+\vec{e}_\rho\rho^{\lambda_u}\{D_1\sin(\lambda_u+1)\theta-D_3\sin(\lambda_u-1)\theta\}+$$

$$+\vec{e}_\theta\rho^{\lambda_u}\{D_1\cos(\lambda_u+1)\theta+\nu_2D_3\cos(\lambda_u-1)\theta\},\quad -(\pi-\alpha)\leqslant\theta\leqslant\pi-\alpha, \tag{19}$$

где

$$D_1=G[\sin 2\lambda_u(\pi-\alpha)-\lambda_u\sin 2(\pi-\alpha)]^{-1}\left\{\lambda_u\frac{\sin(\lambda_u-1)\alpha}{\sin(\lambda_u+1)\alpha}\sin[\pi(\lambda_u-1)+2\alpha]+\right.$$

$$+\frac{\sin(\lambda_u-1)\alpha}{\sin(\lambda_u+1)\alpha}\sin[\pi(\lambda_u-1)-2\alpha\lambda_u]-\frac{\lambda_u^2-1}{2\lambda_u}(1-\nu_2)\sin\pi(\lambda_u-1)\Bigg\}.$$

$$D_3=2G\lambda_u[\sin 2\lambda_u(\pi-\alpha)-\lambda_u\sin 2(\pi-\alpha)]^{-1}\Bigg\{2\lambda_u\frac{\sin(\lambda_u-1)(\pi-\alpha)}{\sin(\lambda_u+1)(\pi-\alpha)}\sin(\lambda_u+1)\pi-$$

$$-\lambda_u(1-\nu_2)\sin[\pi(\lambda_u+1)-2\alpha]+(1-\nu_2)\sin[\pi(\lambda_u+1)-2\lambda_u\alpha]\Bigg\}.$$

В силу (10) имеем

$$\vec{\varphi}-\vec{\varphi}(0)\sim\pm\vec{e}_\rho\frac{1}{2}\rho^{\lambda_u}\Big\{D_1\sin(\lambda_u+1)(\pi-\alpha)-D_3\sin(\lambda_u-1)(\pi-\alpha)\Big\}+$$

$$+\vec{e}_\theta\frac{1}{2}\rho^{\lambda_u}\Big\{D_1\cos(\lambda_u+1)(\pi-\alpha)+\nu_2 D_3\cos(\lambda_u-1)(\pi-\alpha)\Big\}. \qquad (20)$$

Здесь верхний знак соответствует лучу $\theta=\pi-\alpha$, а нижний — лучу $\theta=-(\pi-\alpha)$.

Постоянную G будем определять аналогично предыдущему случаю:

$$G=-k_2^{-1}(\alpha)\int_{\partial\Omega}(\vec{g}-\vec{g}(0))T(\partial_y, n)\vec{\zeta}^{(l)}ds, \qquad (21)$$

где $\vec{\zeta}^{(l)}$ решение задачи

$$A\vec{\zeta}^{(l)}=0 \text{ в } \Omega^{(l)}, \quad \vec{\zeta}^{(l)}=0 \text{ на } \partial\Omega\setminus p_j,$$

имеющее асимптотику

$$\vec{\zeta}^{(l)}\sim\vec{e}_\rho\rho^{-\lambda_u}\Big\{-\frac{\sin(\lambda_u+1)\alpha}{\sin(\lambda_u-1)\alpha}\sin(\lambda_u-1)\theta+\sin(\lambda_u+1)\theta\Big\}+$$

$$+\vec{e}_\theta\rho^{-\lambda_u}\Big\{\frac{\sin(\lambda_u+1)\alpha}{\sin(\lambda_u-1)\alpha}\cos(\lambda_u-1)\theta+\nu_2\cos(\lambda_u+1)\theta\Big\}, \quad -\alpha\leqslant\theta\leqslant\alpha.$$

В (16) и (21) k_1 и k_2—константы, зависящие от упругих постоянных и величины угла области.

Формулы (20) и (21) определяют главный член асимптотики вектор-функции $\vec{\varphi}-\vec{\varphi}(0)$ в случае $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$.

Ереванский политехнический институт им. К. Маркса

Ս. Ս. ԶԱՐԴԱՐՅԱՆ

Լամեի հավասարումներից ստացված սինգուլյար ինտեգրալ հավասարումների համակարգի լուծումների վարքագիծը, եզրագծի անկյունային կետերի շրջակայքում

Առաձգականության տեսության հարթ խնդրի լուծման համար դիտարկվում է Լամեի հավասարումներից ստացված սինգուլյար ինտեգրալ հավասարումների համակարգը անկյուններ ունեցող տիրույթների դեպքում։

Հայտնի է, որ եզրային ինտեգրալ հավասարումները բավականաչափ ճշտությամբ լուծելու համար անհրաժեշտ է ուսումնասիրել նրանց լուծումների վարքագիծը անկյունային կետերի շրջակայքում։ Հոդվածը նվիրված է այդ համակարգի լուծումների վարքագծի ուսումնասիրությանը այն դեպքում, երբ տիրույթի եզրում տրված են տեղափոխությունները։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *С. С. Заргарян*, Изв. АН СССР, МТТ, № 3, 1982. [2] *С. С. Заргарян, В. Г. Мазья*, Вестн. ЛГУ им. А. А. Жданова, № 1, 1983. [3] *В. Д. Купрадзе, Т. Г. Гегелиа, М. О. Башелейшвили* и др., Трехмерные задачи математической теории упругости и термоупругости, Наука, М., 1976. [4] *Н. С. Кахниашвили*, Тр. Тбил. ун-та, вып. 50 (1953). [5] *В. Г. Мазья*, Тез. докладов школы-семинара «Теория упругости и вязкоупругости» в Цахкадзоре, Ереван, Изд. АН АрмССР, 1982. [6] *В. Г. Мазья, Б. А. Пламеневский*, Math. Nachr., вып. 76 (1977).