

УДК 517.535.6

МАТЕМАТИКА

Л. Д. Григорян

### К одной теореме Э. Ландау

(Представлено академиком АН Армянской ССР С. Н. Мергеляном 28/XI 1982)

1. Пусть  $U = \{z : |z| < 1\}$  — единичный круг в комплексной плоскости,  $\Gamma$  — его граница,  $K$  — непустое подмножество  $U$ . Для любых натуральных  $n$  и  $m (n \geq m)$  обозначим через  $M_n^{(m)}(U, K)$  совокупность всех мероморфных функций  $f$  в круге  $U$  и таких, что

а) число полюсов  $f$  в  $U$  с учетом кратностей не превосходит  $n$  и все они принадлежат множеству  $K$ ; число геометрически различных полюсов не превосходит  $m$ ;

$$\text{б) } \|f\|_{\Gamma} = \sup_{z \in \Gamma} \lim_{\zeta \rightarrow z, \zeta \in U} |f(\zeta)| \leq 1.$$

Пусть  $R_f$  — сумма главных частей функции  $f \in M_n^{(m)}(U, K)$  по всем ее полюсам в  $U$ . Положим

$$\lambda_n^{(m)}(U, K) = \sup \{ \|R_f\|_{\Gamma} : f \in M_n^{(m)}(U, K) \}, \quad \lambda_n(U, K) = \lambda_n^{(n)}(U, K).$$

Если  $K = U$  и  $m = n$ , т. е. нет никаких ограничений на расположение и число геометрически различных полюсов  $f$  в  $U$ , в работе (1) показано, что  $\lambda_n(U, U) \asymp n$ . Для любого множества  $K$  такого, что  $\bar{K} \subset U$ , имеет место следующая асимптотическая формула:

$$\lambda_n(U, K) \sim \frac{1}{\pi} \log n. \quad (1)$$

В работе (2), где установлено соотношение (1), показано, что если множество  $K$  состоит из единственной точки  $a = 0$ , то (1) сводится к хорошо известному результату Э. Ландау об оценке сумм Тейлора ограниченных аналитических функций в круге  $U$  (3). Из формулы (1) вытекает, что для любой фиксированной точки  $a \in U$  также  $\lambda_n(U, \{a\}) \sim \frac{1}{\pi} \log n$ . Очевидно, что  $\lambda_n^{(1)}(U) = \lambda_n^{(1)}(U, U) = \sup_{a \in U} \lambda_n(U, \{a\})$ . В

настоящей заметке будет доказана следующая

**Теорема. Справедливо соотношение**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_n^{(1)}(U)}{\log n} = \frac{2}{\pi}. \quad (2)$$

**Замечание.** Легко видеть, что в асимптотической формуле для  $\lambda_n^{(1)}(U)$  коэффициент при  $\log n$  завышается вдвое по сравнению с теоремой Э. Ландау.

2. Перейдем к доказательству теоремы; мы опускаем вычисления, связанные с обоснованием ряда дальнейших оценок.

Рассмотрим произвольную функцию  $f \in M_n^{(1)}(U) = M_n^{(1)}(U, U)$ .

Пусть  $f$  имеет в круге  $U$  единственный полюс в точке  $a$ , кратность которого не выше чем  $n$ . Повторяя те же рассуждения, что и в (2), получим

$$|f(z)| \leq e^{1/\log n}, \quad z \in U/g_n, \quad (3)$$

где

$$g_n = g_n(a), \quad g_n(a) = \left\{ z \in U : \left| \frac{z-a}{1-\bar{a}z} \right| < \rho_n \right\}, \quad \rho_n = e^{-1/n \log n};$$

здесь и далее будем считать  $n > 1$ . Фиксируем произвольную точку  $z_0$  и будем оценивать  $|R_A(z_0)|$ ,  $z_0 \in \Gamma$ . Без ограничения общности можно считать, что  $z_0 = 1$ .

Для любой точки  $a \in U$  положим

$$r'_n(a) = \inf_{z \in g_n(a)} |z-1|, \quad r''_n(a) = \sup_{z \in g_n(a)} |z-1|;$$

очевидно,  $0 < r'_n(a) < r''_n(a)$ . Получим оценку для отношения  $r''_n(a)/r'_n(a)$ .

Заметим, что если  $z \in g_n(a)$ , то можно взять  $z = \frac{\omega+a}{1+\bar{a}\omega}$ , где  $|\omega| < \rho_n$ .

Поэтому для произвольных точек  $e^{i\theta} \in \Gamma$  и  $z \in g_n(a)$  имеем

$$|e^{i\theta} - z| = \left| \frac{e^{i\theta} - a + \omega(1 - e^{i\theta}\bar{a})}{1 + \bar{a}\omega} \right| \geq \frac{(1-|a|)(1-\rho_n)}{2}.$$

Следовательно

$$r'_n(a) \geq \frac{(1-|a|)(1-\rho_n)}{2}. \quad (4)$$

Для произвольных точек  $z_1, z_2 \in \partial g_n(a)$  можно считать, что

$$z_1 - z_2 = \frac{\omega_1 + a}{1 + \bar{a}\omega_1} - \frac{\omega_2 + a}{1 + \bar{a}\omega_2}, \quad |\omega_1| = |\omega_2| = \rho_n.$$

Поэтому при  $|a| > \frac{1}{2}$

$$|z_1 - z_2| = \left| \frac{(1-|a|^2)}{\bar{a}} \left( \frac{1}{1+\bar{a}\omega_1} - \frac{1}{1+\bar{a}\omega_2} \right) \right| \leq 8 \frac{1-|a|}{1-\rho_n}.$$

Из последнего соотношения следует, что для  $|a| > \frac{1}{2}$

$$r''_n(a) \leq r'_n(a) + 8(1-|a|)/(1-\rho_n);$$

отсюда, учитывая (4), получаем

$$\frac{r''_n(a)}{r'_n(a)} \leq \frac{16}{(1-\rho_n)^2} + 1. \quad (5)$$

Нетрудно проверить, что неравенство (5) справедливо и при  $|a| \leq \frac{1}{2}$ .

Положим  $\sigma_n(a) = U \cap \{r'_n(a) < |z-1| < r''_n(a)\}$ . Граница области  $\sigma_n(a)$  состоит из дуг  $L'_n(a)$  и  $L''_n(a)$  окружностей  $|z-1| = r'_n(a)$  и  $|z-1| = r''_n(a)$  соответственно и множества  $l_n(a) = \Gamma \cap \{r'_n(a) < |z-1| < r''_n(a)\}$ , которое является объединением двух симметричных относительно вещественной оси дуг единичной окружности  $\Gamma$ .

Так как  $a \in \sigma_n(a)$ , а точка  $z_0 = 1$  лежит вне  $\sigma_n(a)$ , то

$$R_f(1) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\sigma_n(a)} \frac{f(z) dz}{z-1}.$$

Отсюда, воспользовавшись (3), получаем

$$|R_f(1)| \leq \frac{e^{1/\log n}}{2\pi} \int_{\partial\sigma_n(a)} \frac{|dz|}{|z-1|}.$$

Далее, учитывая (5), определение чисел  $\rho_n$  и конструкцию множеств  $\partial\sigma_n$ , легко показать (см. (2)), что

$$|R_f(1)| \leq \left(\frac{2}{\pi} + \varepsilon_n\right) \log n, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0.$$

Аналогичное соотношение верно для  $\|R_f\|_{\Gamma}$ ; следовательно, для всех  $n$

$$\lambda_n^{(1)}(U) \leq \left(\frac{2}{\pi} + \varepsilon_n\right) \log n.$$

Теперь для доказательства теоремы достаточно показать, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_n^{(1)}(U)}{\log n} \geq \frac{2}{\pi}. \quad (6)$$

Считая  $0 \leq a < 1$ , положим

$$K_{n,a}^*(z) = K_n\left(-\frac{z-a}{1-az}\right), \quad T_{n,a}(z) = K_{n,a}(z) \cdot K_{n,a}^*(z) \cdot \frac{1-az}{z-a},$$

где  $K_n(z)$ ,  $K_{n,a}(z)$  имеют тот же смысл, что и в (2).

Из оценки (7) работы (2) имеем

$$\left| \arg(1-az) + \arg \frac{1}{1+z} \arg K_{n,a}^*(z) \right| \leq \frac{2C_1}{\sqrt{n \left| \arg \left( -\frac{z-a}{1-az} \right) \right|}}. \quad (7)$$

Чтобы оценить  $|\arg[-(z-a)/(1-az)]|$ , сначала заметим, что при  $z = e^{i\theta} \in \Gamma$

$$\cos \left[ \arg \left( -\frac{z-a}{1-az} \right) \right] = \frac{2(1+a)^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} - (1-a)^2}{(1-a)^2 + 4a \sin^2 \frac{\theta}{2}},$$

$$\sin \left[ \arg \left( -\frac{z-a}{1-az} \right) \right] = \frac{(a^2-1) \sin \theta}{(1-a)^2 + 4a \sin^2 \frac{\theta}{2}}.$$

В дальнейшем будем считать  $0 < 1 - a_n < 1/n$ . Если  $z = e^{i\theta}$  и  $|\theta| \leq (1 - a_n)n/\log n$ , то при всех  $n$  выполняется хотя бы одно из следующих неравенств:

$$\cos \left[ \arg \left( -\frac{z - a_n}{1 - a_n z} \right) \right] \leq 0,$$

$$\left| \sin \left[ \arg \left( -\frac{z - a_n}{1 - a_n z} \right) \right] \right| \geq C_2 \frac{\log n}{n}$$

(буквой  $C$  с различными индексами мы обозначаем абсолютные положительные константы).

Отсюда следует, что при тех же значениях  $z$  справедлива оценка

$$\left| \arg \left( -\frac{z - a_n}{1 - a_n z} \right) \right| \geq C_3 \frac{\log n}{n}.$$

С учетом последнего соотношения из (7) получаем

$$\left| \arg(1 - a_n z) + \arg \frac{1}{1 + z} + \arg K_{n, a_n}^*(z) \right| \leq \frac{C_4}{\sqrt{\log n}}, \quad (8)$$

$$z = e^{i\theta}, \quad |\theta| \leq C''(1 - a_n)n/\log n.$$

Из оценки (8) работы (2) имеем

$$\left| \arg(1 - a_n z) + \arg \frac{1}{1 - z} + \arg K_{n, a_n}(z) \right| \leq \frac{C_5}{\sqrt{\log n}}, \quad (9)$$

$$z = e^{i\theta}, \quad |\theta| \geq C'(1 - a_n)\log n/n.$$

Суммирование оценок (8) и (9) дает, что

$$\left| 2\arg(1 - a_n z) + \arg \frac{1}{1 + z} + \arg \frac{K_{n, a_n}(z) \cdot K_{n, a_n}^*(z)}{1 - z} \right| \leq \frac{C_6}{\sqrt{\log n}}, \quad (10)$$

$$z \in J_{n, a_n} = \{z = e^{i\theta} : C'(1 - a_n)\log n \leq |\theta| \leq C''(1 - a_n)n/\log n\}$$

(константы  $C'$  и  $C''$  выбираются так, что  $I_n(a_n) \subset J_{n, a_n}$ ). При  $z \in J_{n, a_n}$ , считая  $|\arg[1/(1 + z)]| < C_8/\sqrt{\log n}$ , получим

$$\left| \arg \frac{T_{n, a_n}(z)}{1 - z} \right| \leq \frac{C_7}{\sqrt{\log n}}. \quad (11)$$

Заметим, что  $|T_{n, a_n}(z)| = 1$  при  $z \in \Gamma$  и  $T_{n, a_n}(z) \in M_{2n+1}^{(1)}(U)$ . Повторяя те же рассуждения, что и в (2), из (11), с учетом конструкции множеств  $J_{n, a_n}$ , нетрудно получить соотношение (6). Теорема доказана.

Ереванский политехнический институт им. К. Маркса

Լ. Դ. ԳՐԻԳՈՐՅԱՆ

Է. Լանդաուի մի թեորեմի վերաբերյալ

Հեղինակի (1) աշխատանքում ցանկացած  $K(\bar{K} \subset U)$  բազմություն համար ստացված է

$$\lambda_n(U, K) \sim \frac{1}{\pi} \log n \quad (1)$$

ասիմպտոտական բանաձևը, որտեղ  $U = \{z : |z| < 1\}$  — միավոր շրջանն է կոմպլեքս հարթության վրա: Նույն աշխատանքում ցույց է տրված, որ եթե  $K = \{0\}$ , ապա վերը նշված բանաձևը համընկնում է միավոր շրջանում սահմանափակ անալիտիկ ֆունկցիաների թեյլորյան մասնակի գումարների գնահատականի՝ է. Լանդաուի հայտնի արդյունքի հետ: (1) բանաձևից բխում է, նաև, որ  $U$ -ին պատկանող ցանկացած սեեոված  $a$  կետի համար՝

$$\lambda_n(U, \{a\}) \sim \frac{1}{\pi} \log n:$$

Ներկա հոդվածում ապացուցված է

$$\lambda_n^{(1)}(U) \sim \frac{2}{\pi} \log n$$

ասիմպտոտական բանաձևը, որտեղ ակնհայտորեն

$$\lambda_n^{(1)}(U) = \lambda_n^{(1)}(U, U) = \sup_{a \in U} \lambda_n(U, \{a\}):$$

Այսպիսով  $\lambda_n^{(1)}(U)$ -ի ասիմպտոտական բանաձևում  $\log n$ -ի գործակիցը երկու անգամ մեծ է է. Լանդաուի բանաձևի համապատասխան գործակիցից:

#### ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

<sup>1</sup> Л. Д. Григорян, Мат. сб., т. 100 (142), № 1 (1976). <sup>2</sup> Л. Д. Григорян, Изв. АН АрмССР. Математика, т. 12, № 3 (1977). <sup>3</sup> E. Landau, Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Functionentheorie, Berlin, 1929.