ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXVII 1983 1

УДК 517.5

МАТЕМАТИКА

Член-корреспондент АН Армянской ССР **А. А. Талалян**

О скорости сходимости к нулю нуль-рядов по системе Хаара

(Представлено 22/XI 1982)

Известно ([1,2]), что для любой полной в $L_2[0, 1]$ ортонормированной системы $\{\varphi_n(x)\}$ существует нуль-ряд в любой метрике $L_p[0, 1]$, $0\leqslant p<1$, т. е. для любого p, $0\leqslant p<1$ существует ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n\varphi_n(x), \tag{1}$$

не все коэффициенты a_n, $n=1, 2, \ldots$; которого равны нулю и который сходится к нулю в метрике $L_p[0, 1]$.

Здесь при $p=0$ метрикой $L_0[0, 1]$ считается метрика сходимости по мере. Для краткости мы обозначаем

$$\|f\|_p=\int_0^1 |f(x)|^p dx, \quad 0<p<1, \quad f\in L_p[0, 1] \tag{2}$$

и для любой почти везде конечной измеримой функции $f(x)$ полагаем

$$\|f\|_0=\int_0^1 \frac{|f(x)|dx}{1+|f(x)|}. \tag{3}$$

В работе П. Освальда ([3]), где рассмотрен вопрос представления функции $f(x)\in L_p[0, 1]$, $0<p<1$, рядами по системе Хаара, частные суммы которого имели бы наилучший порядок приближения к функции $f(x)$, приведена точная оценка скорости стремления к нулю частичных сумм нуль-рядов по системе Хаара в пространствах $L_p[0, 1]$; $0<p<1$.

Этот легко проверяемый результат можно сформулировать следующим образом.

Пусть

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n\mathrm{X}_n(x) \tag{4}$$

ряд по системе Хаара и

$$S_n(x)=\sum_{k=1}^{n} a_k\mathrm{X}_k(x) \tag{5}$$

частичные суммы этого ряда.

Тогда, если

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{\|S_n\|_p}{1/n^{1-p}}=0,\quad 0<p<1,\tag{6}$$

то все коэффициенты a_n, $n=1, 2, \ldots$; ряда (4) равны нулю и вместе с тем существует ряд (4), не все коэффициенты которого равны нулю и

$$\|S_n\|_p=O(1/n^{1-p}),\quad 0<p<1.\tag{7}$$

В настоящей работе аналогичные точные оценки устанавливаются в случае сходимости по мере, т. е. при $p=0$, и указываются также формулы, восстанавливающие коэффициенты рядов Хаара, частичные суммы которых сходятся в метрике $L_p[0, 1]$, $0\leqslant p<1$, к данной функции $f(x)$ со скоростью, обеспечивающей единственность ряда. Отметим, что вопрос о восстановлении коэффициентов таких рядов в случае сходимости в $L_p[0, 1]$, $0<p<1$, был поставлен П. Освальдом. Оказывается, что коэффициенты этих рядов восстанавливаются при помощи введенного А. Н. Колмогоровым A-интеграла или же некоторыми обобщениями этого интеграла (([4]), с. 100; ([5]), с. 585).

Определенная на отрезке $[0, 1]$ функция $f(x)$ называется A-интегрируемой, если $\mu\{x; |f(x)|\geqslant n\}=o(1/n)$ и существует конечный предел

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1[f(x)]_n dx=(A)\int_0^1 f(x)dx,\tag{8}$$

где

$$[f(x)]_n=\begin{cases} f(x) & \text{при } |f(x)|\leqslant n\\ 0 & \text{при } |f(x)|>n\end{cases}.\tag{9}$$

Имеют место следующие теоремы.

Теорема 1. *Если ряд (4) по системе Хаара сходится в метрике $L_p[0, 1]$, $0\leqslant p<1$, к функции $f(x)$ со скоростью $o(1/n^{1-p})$, т. е.*

$$\|S_n-f\|_p\leqslant\frac{\varepsilon_n}{n^{1-p}},\quad n=1, 2, \ldots;\tag{10}$$

где $0\leqslant p<1$ и $\varepsilon_n\to 0$, то $f(x)$ A-интегрируема на каждом интервале Хаара $\Delta=(i-1/2^m, i/2^m)$, $m\geqslant 0$, $1\leqslant i\leqslant 2^m$, и ряд (4) является рядом Фурье—Хаара функции $f(x)$ в смысле A-интегрирования, т. е.

$$a_i=(A)\int_0^1 \chi_i(x)f(x)dx,\quad i=1, 2, \ldots;\tag{11}$$

Теорема 2. *Пусть некоторая подпоследовательность $\{S_{n_k}(x)\}$ частичных сумм ряда (4) сходится в метрике $L_p[0, 1]$, $0\leqslant p<1$ к функции $f(x)$ со скоростью $o(1/n_k^{1-p})$ и*

$$\mu\{x;\ |f(x)|\geqslant n_k\}=o(1/n_k^{1-p}). \tag{12}$$

Тогда для любого $c\geqslant 1$ *и для любого интервала Хаара* Δ *существует конечный предел*

$$\lim_{k\to\infty}\int_{\Delta}[f(x)]_{c\cdot n_k}dx \tag{13}$$

и коэффициенты a_i *ряда* (4) *определяются равенствами*

$$a_i=\lim_{k\to\infty}\int_0^1 \mathrm{X}_i(x)[f(x)]_{c\cdot n_k}dx,\quad i=1,\ 2,\dots \tag{14}$$

Из теоремы 2 получается

Следствие. Если для некоторого p, $0\leqslant p<1$, частичные суммы $S_n(x)$ ряда (4) по системе Хаара удовлетворяют условию

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{\|S_n\|}{1/n^{1-p}}=0, \tag{15}$$

то все коэффициенты этого ряда равны нулю.

При $0<p<1$ это утверждение фактически приведено в ([3]), а в случае $p=0$, т. е. для сходимости по мере, оно является следствием теоремы 2.

Точность оценки (15) для всех p, $0\leqslant p<1$, видна на примере ряда Хаара

$$\mathrm{X}_1(x)+\mathrm{X}_2(x)+\sum_{i=1}^{\infty}\sqrt{2^i}\,\mathrm{X}_i(x), \tag{16}$$

при записи которого в виде (4) для частичных сумм $S_n(x)$ имеем

$$\|S_n\|_p=O(1/n^{1-p}),\quad 0\leqslant p<1. \tag{17}$$

В нуль-ряде (16) отличные от нуля коэффициенты a_n имеют порядок роста $O(\sqrt{n})$. В связи с этим естественно рассмотреть вопрос о нахождении точного порядка скорости стремления к нулю в метриках $L_p[0,1]$, $0\leqslant p<1$, частичных сумм нуль-рядов по системе Хаара и определить способ восстановления коэффициентов (когда скорость приближения обеспечивает единственность ряда) в классе рядов (4), коэффициенты которых имеют более медленный порядок роста $|a_n|=o(\sqrt{n})$. Заметим при этом, что указанный класс рядов содержит все ряды Фурье—Хаара суммируемых функций.

Имеют место следующие теоремы.

Теорема 3. *Пусть коэффициенты ряда* (4) *удовлетворяют условию* $|a_n|=o(\sqrt{n})$ *и некоторая подпоследовательность* $\{S_{n_k}(x)\}$ *его частичных сумм сходится к* $f(x)$ *в метрике* $L_p[0,1]$, $0\leqslant p<1$, *со скоростью* $O(1/n_k^{1-p})$, *т. е.*

$$\|S_{n_k}(f)\|_p\leqslant\frac{M}{n_k^{1-p}},\quad M>0,\quad k=1,\ 2,\dots; \tag{18}$$

Тогда существует последовательность $\alpha_k > 0$, $\alpha_k \uparrow +\infty$, *для которой существуют конечные пределы*

$$\lim_{k \to \infty} \int_{\Delta} [f(x)]_{\alpha_k} dx \tag{19}$$

для всех интервалов Хаара Δ, *и коэффициенты* a_n *ряда* (4) *определяются равенствами*

$$a_n = \lim_{k \to \infty} \int_0^1 \mathrm{X}_n(x) [f(x)]_{\alpha_k} dx. \tag{20}$$

Теорема 4. *Для любого* p, $0 \leqslant p < 1$, *и для любой последовательности* $\beta_n > 0$, $\beta_n \uparrow +\infty$, *существует сходящийся в метрике* $L_p[0, 1]$ *к нулю ряд* (4), *не все коэффициенты* a_n *которого равны нулю,* $|a_n| = o(\sqrt{n})$ *и частичные суммы* $S_n(x)$ *которого удовлетворяют неравенствам*

$$\|S_n\|_p \leqslant \frac{M \cdot \beta_n}{n^{1-p}}, \quad M > 0, \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{21}$$

Институт математики Академии наук Армянской ССР

Հայկական ՍՍՀ ԳԱ թղթակից-անդամ Ա. Ա. ԹԱԼԱԼՅԱՆ

Հարի զրո-շարքերի զրոյի զուգամիտելու արագության մասին

Ստացված են ճշգրիտ գնահատականներ $L_p(0, 1)$, $0 < p < 1$, *և ըստ չափի մետրիկաներում Հարի շարքերի մասնակի գումարների զրոյի ձգտելու արագությունների վերաբերյալ։ Ստացված են նաև այդ շարքերի գործակիցները շարքի գումարի միջոցով վերականգնելու բանաձևեր, երբ զուգամիտության արագությունն ապահովում է շարքի միակությունը։*

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *А. А. Талалян*, УМН, т. 15, № 5 (1965). [2] *А. А. Талалян*, Acta Math. Acad. Sci. Hung., 21, № 1—2 (1970). [3] *P. Oswald*, J. Approxim. Theory, 33, № 1 (1981). [4] *А. Н. Колмогоров*, Основные понятия теории вероятностей, Наука, М., 1974. [5] *Н. К. Бари*, Тригономе рические ряды, Гос. изд. физ.-мат. лит., М., 1961.