ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXVII 1983 1

УДК 514.752.44

МАТЕМАТИКА

В. А. Мирзоян

Нормальная дефектность подмногообразия

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. В. Амбарцумяном 27/IX 1982)

1. Пространства дефектности риманова многообразия и пространства относительной дефектности подмногообразия евклидова пространства определены и изучены Черном и Кюипером ([1]).

В настоящей работе для m-мерного подмногообразия M_m n-мерного евклидова пространства R_n определяется понятие пространства нормальной дефектности и изучаются некоторые его свойства.

Чтобы перейти к более точным определениям и формулировкам, приведем некоторые необходимые сведения из римановой геометрии подмногообразий.

Пусть M_m—подмногообразие в R_n, а $T(M_m)$ и $T^{\perp}(M_m)$ обозначают его касательное и нормальное расслоения соответственно. Риманова связность $\tilde{\nabla}$ пространства R_n индуцирует в расслоениях $T(M_m)$ и $T^{\perp}(M_m)$ естественные связности: в $T(M_m)$—связность Леви—Чивита ∇ индуцированной метрики на M_m, а в $T^{\perp}(M_m)$—нормальную связность $\nabla^{\perp}$, которая векторным полям X и ζ как сечениям в $T(M_m)$ и $T^{\perp}(M_m)$ соответственно ставит в соответствие в точке $x\in M_m$ компоненту ковариантной производной $(\tilde{\nabla}_X\zeta)_x$ во втором прямом слагаемом $T_x^{\perp}(M_m)$ разложения $T_x(R_n)=T_x(M_m)\oplus\oplus T_x^{\perp}(M_m)$. При этом имеют место формулы ([2])

$$\tilde{\nabla}_X Y=\nabla_X Y+\alpha_2(X,\ Y), \tag{1}$$

$$\tilde{\nabla}_X\zeta=-A_\zeta(X)+\nabla_X^{\perp}\zeta, \tag{2}$$

где X, Y—касательные к M_m векторые поля, а ζ—нормальное к M_m векторное поле. В правых частях формул (1), (2) первые слагаемые в точке $x\in M_m$ принадлежат касательному пространству $T_x(M_m)$, а вторые слагаемые — нормальному пространству $T_x^{\perp}(M_m)$. В формуле (1) α_2 является билинейной симметрической формой и называется второй фундаментальной формой подмногообразия M_m. В формуле (2) A_ζ в точке $x\in M_m$ является симметрическим эндоморфизмом пространства $T_x(M_m)$ и называется вторым фундаментальным тензором, соответствующим нормальному векторному полю ζ. Имеет место тождество ([2])

$$g(A_\zeta(X),\ Y)=g^{\perp}(\alpha_2(X,\ Y),\ \zeta),$$

где g и $g^{\perp}$—метрики в $T(M_m)$ и $T^{\perp}(M_m)$ соответственно. Кроме того тензор A_ζ удовлетворяет уравнению Кодацции ([2])

$$(\bar{\nabla}_X A_\zeta)(Y) = (\bar{\nabla}_Y A_\zeta)(X), \tag{3}$$

где $\bar{\nabla}$—связность ван дер Вардена—Бортолотти ([2]).

Тензор $R^{\perp}$, определенный равенством $R^{\perp}(X, Y)\zeta = \Delta^{\perp}_X \Delta^{\perp}_Y \zeta - \nabla^{\perp}_Y \nabla^{\perp}_X \zeta - \nabla^{\perp}_{[X,Y]}\zeta$, называется тензором кривизны нормальной связности $\nabla^{\perp}$. Для любых касательных векторных полей X, Y и любых нормальных векторных полей ζ, η имеет место уравнение Риччи ([2])

$$g^{\perp}(R^{\perp}(X, Y)\zeta, \eta) = g([A_\zeta, A_\eta](X), Y) \tag{4}$$

где $[A_\zeta, A_\eta] = A_\zeta A_\eta - A_\eta A_\zeta$. Если $R^{\perp} \equiv 0$, то нормальная связность $\nabla^{\perp}$ называется плоской.

За всеми остальными сведениями отсылаем к монографии ([2]).

2. В касательном пространстве $T_x(M_m)$ в точке $x \in M_m$ определим подпространство $T_1(x)$ равенством

$$T_1(x) = \{X \in T_x(M_m);\quad R^{\perp}(X, Y) = 0 \quad \forall Y \in T_x(M_m)\}. \tag{5}$$

Это подпространство будем называть пространством нормальной дефектности подмногообразия M_m в точке x, а его размерность $\mu_1(x)$—индексом нормальной дефектности в этой точке.

Очевидно, что нормальная связность подмногообразия M_m является плоской тогда и только тогда, когда $\mu_1(x) = m$ в каждой точке $x \in M_m$.

Если $R^{\perp} \neq 0$ в некоторой точке $x \in M_m$, то $\mu_1(x) \leqslant m-2$.

Пространство $T_1(x)$ можно определять и другими способами.

Лемма 1. *Условия* (*а*) $X \in T_1(x)$, (б) $[A_\zeta, A_\eta](X) = 0$ *для любых* ζ, $\eta \in T^{\perp}_x(M_m)$ *эквивалентны*.

Доказательство. Если $X \in T_1(x)$, то $R^{\perp}(X, Y) = 0$ для любого $Y \in T_x(M_m)$. Следовательно, из уравнения Риччи (4) будем иметь $g([A_\zeta, A_\eta](X), Y) = 0$ для любых ζ, $\eta \in T^{\perp}_x(M_m)$. Отсюда в силу невырожденности метрики g получаем $[A_\zeta, A_\eta](X) = 0$. Обратно, если для некоторого $X \in T_x(M_m)$ имеем $[A_\zeta, A_\eta](X) = 0$ для любых ζ, $\eta \in T^{\perp}_x(M_m)$, то из уравнения Риччи в силу произвольности η и невырожденности $g^{\perp}$ получим $R^{\perp}(X, Y)\zeta = 0$. Так как ζ и Y произвольны, то $X \in T_1(x)$. Лемма доказана.

Из леммы 1 следует, что пространство нормальной дефектности $T_1(x)$ можно определить равенством

$$T_1(x) = \{X \in T_x(M_m);\quad [A_\zeta, A_\eta](x) = 0 \quad \forall \zeta, \eta \in T^{\perp}_x(M_m)\}. \tag{5'}$$

Далее, для каждого вектора $Y \in T_x(M_m)$ определим в $T_x(M_m)$ подпространство $T_x(Y)$ следующим образом:

$$T_x(Y) = \{Z \in T_x(M_m);\quad R^{\perp}(Y, Z) = 0\}.$$

Так как $R^{\perp}(Y, Y) = 0$, то $Y \in T_x(Y)$. Следовательно, $\mu_x(Y) = dim\, T_x(Y) \geqslant 1$ для любого ненулевого вектора $Y \in T_x(M_m)$.

Очевидно, что $Y \in T_1(x)$ тогда и только тогда, когда $T_x(Y) = T_x(M_m)$ или, что равносильно, $\mu_x(Y) = m$. Следовательно, если

$Y \notin T_1(x)$, то $\mu_x(Y) \leqslant m-1$. Таким образом пространство $T_1(x)$ можно определить как множество векторов $Y \in T_x(M_m)$ таких, что $T_x(Y) = T_x(M_m)$ или, что равносильно, $\mu_x(Y) = m$. Кроме того из определения пространства $T_1(x)$ следует, что $T_1(x) \subset T_x(Y)$ для любого $Y \in T_x(M_m)$. Далее, если $X \in T_x(Y)$ для любого Y, то $R^{\perp}(X, Y) = 0$ для любого Y, т. е. $X \in T_1(x)$. Следовательно,

$$T_1(x) = \bigcap_{Y \in T_x(M_m)} T_x(Y).$$

Лемма 2. *Ортогональное дополнение $T_1^{\perp}(x)$ к $T_1(x)$ в $T_x(M_m)$ инвариантно относительно коммутаторов $[A_\zeta, A_\eta]$ для всех $\zeta, \eta \in T_x^{\perp}(M_m)$.*

Приведем одну лемму общего характера, которая будет нужна в дальнейшем.

Лемма 3. *Тензор кривизны нормальной связности $R^{\perp}$ любого подмногообразия M_m в R_n удовлетворяет следующему тождеству:*

$$(\bar{\nabla}_X R^{\perp})(Y, Z) + (\bar{\nabla}_Y R^{\perp})(Z, X) + (\bar{\nabla}_Z R^{\perp})(X, Y) = 0, \tag{6}$$

где $\bar{\nabla}$—связность ван дер Вардена—Бортолотти, X, Y, Z—касательные векторные поля на M_m.

Замечание. Лемма 3 справедлива также в том случае, когда объемлющее пространство есть риманово пространство произвольной постоянной кривизны (при доказательстве использовано уравнение (3).

Следующая теорема описывает важное свойство пространства нормальной дефектности подмногообразия.

Теорема. *Пусть пространство нормальной дефектности $T_1(x)$ подмногообразия M_m в R_n в некоторой области $U \subset M_m$ имеет постоянную размерность $\mu_1(x) = \text{const} \neq 0$. Тогда в этой области распределение T_1 инволютивно. Если тензор нормальной кривизны $R^{\perp}$ подмногообразия M_m параллелен в связности ван дер Вардена—Бортолотти, то распределение T_1 параллельно и вполне геодезично, т. е. его интегральное многообразие вполне геодезично в M_m. В последнем случае ортогональное дополнение $T_1^{\perp}$ к T_1 в $T(M_m)$ также параллельно, и, следовательно, инволютивно и вполне геодезично.*

Доказательство. Пусть $X, Y \in T_1$. Покажем, что коммутатор $[X, Y]$ также принадлежит T_1. Действительно, если Z, ζ—произвольные касательное и нормальное векторные поля на M_m, то

$$(\bar{\nabla}_X R^{\perp})(Y, Z)\zeta = \bar{\nabla}_X(R^{\perp}(Y, Z)\zeta) - R^{\perp}(\nabla_X Y, Z)\zeta -$$
$$- R^{\perp}(Y, \nabla_X Z)\zeta - R^{\perp}(Y, Z)\nabla_X^{\perp}\zeta = -R^{\perp}(\nabla_X Y, Z)\zeta.$$

Вычисляя аналогично, получаем:

$$(\bar{\nabla}_Y R^{\perp})(Z, X)\zeta = -R^{\perp}(Z, \nabla_Y X)\zeta,$$
$$(\bar{\nabla}_Z R^{\perp})(X, Y)\zeta = 0.$$

Применяя тождество (6) и учитывая, что связность ∇ имеет нулевое кручение, т. е. $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$, имеем:

$$0 = R^{\perp}(\nabla_X Y, Z)\xi - R^{\perp}(\nabla_Y X, Z)\xi = R^{\perp}([X, Y], Z)\xi.$$

Отсюда в силу произвольности ξ и Z следует, что $[X, Y] \in T_1$, т. е. распределение T_1 инволютивно.

Пусть $\bar{\nabla}_Z R^{\perp} = 0$ для любого касательного к M_m векторного поля Z. Если $Y \in T_1$, а X и Z произвольны, то

$$0 = (\bar{\nabla}_Z R^{\perp})(Y, X)\xi = -R^{\perp}(\nabla_Z Y, X)\xi.$$

Следовательно, $\nabla_Z Y \in T_1$ для любого Z и распределение T_1 параллельно. Тогда оно и вполне геодезично. Параллельность распределения $T_1^{\perp}$ есть следствие параллельности T_1. Инволютивность и вполне геодезичность $T_1^{\perp}$ есть тривиальные следствия его параллельности. Теорема доказана.

3. Пусть M_m является римановым многообразием с тензором кривизны римановой связности R. Подпространство $T_0(x) \subset T_x(M_m)$, определенное равенством

$$T_0(x) = \{X \in T_x(M_m);\quad R(X, Y) = 0 \quad \forall Y \in T_x(M_m)\},$$

называется пространством дефектности многообразия M_m в точке $x \in M_m$, а его размерность $\mu_0(x)$—индексом дефектности в этой точке. Если M_m изометрически погружено в евклидово пространство R_n, то индекс относительной дефектности $\nu(x)$ в точке $x \in M_m$ (M_m отождествляется с его образом в R_n) есть размерность подпространства $T'_x \subset T_x(M_m)$, определенного равенством

$$T'_x = \{X \in T_x(M_m);\quad A_\xi(X) = 0 \quad \forall \xi \in T_x^{\perp}(M_m)\}$$

и называемого пространством относительной дефектности в точке $x \in M_m$. Эти понятия были определены Черном и Кюипером ([1]). Известно, что если $\mu_0(x) = \text{const}$, $\nu(x) = \text{const}$ в некоторой области на M_m, то в этой области распределения T_0 и T' инволютивны и их интегральные многообразия являются вполне геодезическими в M_m. Кроме того $T' \subset T_0$. Указанные утверждения можно найти, например, в ([1,3,4]).

Укажем на связь пространств T'_x, $T_0(x)$ и $T_1(x)$. Пусть $X \in T'_x$. Тогда $A_\xi(X) = 0$ для любого $\xi \in T_x^{\perp}(M_m)$. Следовательно, $[A_\xi, A_\eta](X) = 0$ для любых $\xi, \eta \in T_x^{\perp}(M_m)$ и $X \in T_1(x)$. Таким образом, верны включение $T'_x \subset T_1(x)$, и неравенство $\nu(x) \leqslant \mu_1(x)$. Так как $T'_x \subset T_0(x)$, то $T'_x \subset T_0(x) \cap T_1(x)$.

Справедливо следующее

Предложение. Пусть $T_0(x)$, T'_x, $T_1(x)$ обозначают соответственно пространство дефектности, относительной дефектности и нормальной дефектности подмногообразия $M_m \subset R_n$ в точке $x \in M_m$. Если в некоторой области $U \subset M_m$ пространства $T_0(x)$, $T_1(x)$ и пересечение $T_0(x) \cap T_1(x)$ имеют ненулевые постоянные размерности, то в этой области распределение $T_0 \cap T_1$ инволютивно.

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Ենթաբազմաձևության նորմալ դեֆեկտականությունը

Էվկլիդյան R_n տարածության M_m ենթաբազմաձևության x կետում $T_x(M_m)$ շոշափող տարածության մեջ

$$T_1(x)=\{X\in T_x(M_m);\quad R^{\perp}(X,\ Y)=0\quad \forall Y\in T_x(M_m)\}$$

հավասարությամբ որոշված ($R^{\perp}$-ը նորմալ կապակցության տենզորն է) (T_1x) ենթատարածությունը կոչվում է $M^{\perp}$ ենթաբազմաձևության նորմալ դեֆեկտականության տարածություն։ Ապացուցված է, որ T_1 բաշխումը լիովին ինտեգրելի է։ Եթե $R^{\perp}$ տենզորը զուգահեռ է, ապա T_1 բաշխումը նաև զուգահեռ է և լիովին գեոդեզիկ։ Կապ է հաստատված ենթաբազմաձևության դեֆեկտականության, նորմալ դեֆեկտականության և հարաբերական դեֆեկտականության տարածությունների միջև։

Ապացուցված է, որ $R^{\perp}$ տենզորը բավարարում է հետևյալ նույնությունը.

$$(\bar{\nabla}_X R^{\perp})(Y,\ Z)+(\bar{\nabla}_Y R^{\perp})(Z,\ X)+(\bar{\nabla}_Z R^{\perp})(X,\ Y)=0,$$

որտեղ՝ $\bar{\nabla}$-ն վան դեր Վարդեն—Բորտոլոտիի կապակցվածությունն է, իսկ X, Y, Z—կամայական շոշափող վեկտորական դաշտեր են։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *S. S. Chern, N. H. Kuiper*, Ann. of Math., v. 56, №3 (1952) [2] *B.-Y. Chen*, Geometry of submanifolds, N. Y., Marcel Dekker, 1973. [3] *P. Hartman*, Trans. of AMS, v. 115 (1965). [4] *R. Maltz*, Cahiers Top. et Géom. Diff., v. 8 (1966).