УДК 519.95

С. В. Шахвердян

**Оптимизация дискретных систем с ограничением
на изменение управления**

(Представлено академиком АН Армянской ССР Р. Т. Адонцем 12/VII 1982)

Рассматриваются задачи дискретного оптимального управления (ДОУ) с ограничением на полное изменение скалярного и векторного управления. В форме дискретного принципа максимума приводятся необходимые условия оптимальности. Показывается справедливость обычного принципа максимума для задач ДОУ.

Задачи оптимального управления с ограничением на полное изменение управления исследованы главным образом для непрерывных систем (¹⁻⁴). Задачи ДОУ с такого рода ограничениями ранее не рассматривались.

Задача с ограничением на изменение скалярного управления.

Пусть объект управления описывается системой уравнений

$$x(i+1) = x(i) + f(x(i), u(i)), \quad i = \overline{0, k-1} \quad (1)$$

с граничными условиями

$$x(0) = x^0, \quad x(k) = x^k, \quad (2)$$

где $x(i)$ — n -мерный фазовый вектор; $u(i)$ — m -мерный управляющий вектор; f — n -мерная вектор-функция; k — целое число, определяющее длительность управляемого процесса; x^0, x^k — n -мерные известные векторы.

Требуется минимизировать сумму

$$\sum_{i=0}^{k-1} F(x(i), u(i)) \quad (3)$$

по $u(i)$ при ограничениях (1), (2) и

$$V_0^k u_j(i) \leq \varepsilon, \quad (4)$$

где $V_0^k u_j(i)$ — полное изменение функции $u_j(i)$ на интервале $[0, k]$; ε — заданное число. Функции $f(x(i), u(i)), F(x(i), u(i))$ предполагаются непрерывными и непрерывно-дифференцируемыми по $x(i)$ и $u(i)$.

Известно, что полное изменение функции $u(t)$, заданной на $[0, T]$, определяется как точная верхняя грань сумм вида

$$\sum_{s=1}^{\sigma} |u(t_s) - u(t_{s-1})|$$

по всевозможным разбиениям отрезка $[0, T]$ точками $t_0 = 0 < t_1 < \dots$

..., $\langle t_s = T$ (5). Для задач ДОУ разбиение отрезка $[0, k]$ осуществляется исходя из физической сущности задачи и обеспечения необходимой точности ее решения, поэтому $V_0^k u_j(i)$ может быть определено так:

$$V_0^k u_j(i) = \sum_{i=0}^{k-1} |u_j(i+1) - u_j(i)|.$$

Неравенство (4) заменим равенством

$$V_0^k u_j(i) - \varepsilon + x_{n+1}^2 = 0, \quad (5)$$

где x_{n+1} — неизвестный параметр. Из-за ввода параметра x_{n+1} задача (1)–(3), (5) стала параметрической, в силу чего система (1) должна быть дополнена уравнением

$$x_{n+1}(i+1) = x_{n+1}(i), \quad \forall i \in [0, k-1].$$

Благодаря вводу параметра x_{n+1} задача (1)–(4) сводится к стандартной задаче ДОУ с параметром, для последующего решения которой можно применять известные схемы.

$$\text{Обозначим } F^0 = F + \lambda \left[|u_j(i+1) - u_j(i)| - \frac{1}{k} (\varepsilon - x_{n+1}^2) \right],$$

$$x_0(i+1) = x_0(i) + F^0, \quad x_0(0) = 0, \quad x_0(k) = I^0 = \sum_{i=0}^{k-1} F^0(i).$$

Тогда функция Гамильтона может быть определена так: $H = \psi(i)\Phi(i)$, где $\Phi(i) = (F^0, f, f_{n+1})$, $f_{n+1}(i) = x_{n+1}(i)$, $\psi(i) = n+2$ -мерный сопряженный вектор, определяемый из системы

$$\psi(i+1) = \left(E - \frac{\partial \Phi(i)}{\partial \bar{x}(i)} \right) \psi(i), \quad i = \overline{0, k-1}, \quad (6)$$

$\psi_s(k) = -v_s$, $s = \overline{1, n}$, $\psi_{n+1}(k) = 0$, где v_s — множитель; E — единичная матрица размера n ; $\frac{\partial \Phi}{\partial \bar{x}}$ — квадратная матрица размера $n+2$; $\bar{x} = (x_0, x, x_{n+1})$. Пусть $u^*(i)$ — оптимальное управление, $x^*(i)$ — соответствующая ему при $\bar{x}(0) = (0, x^0, x_{n+1}(0))$ траектория в задаче (1)–(3), (5). Тогда имеет место

$$\max_{u(i)} H(\psi^*(i), x^*(i), u(i)) = H(\psi^*(i), x^*(i), u^*(i)), \quad (7)$$

т. е. для дискретных систем справедлив обычный принцип максимума, где $\psi^*(i)$ находится из (6). Утверждение (7) для случая выпуклости множества

$$R(x) = \{z/z = f(x, u), \quad u \in U\}$$

доказано в (6). Однако в этой же и некоторых других работах ставится под сомнение справедливость обычного принципа максимума для задач ДОУ в общем случае. К этому принципиальному вопросу мы еще вернемся.

Из системы (6) имеем

$$\psi_{n+1}(i) = \psi_{n+1}(i+1) + 2\psi_0 \lambda x_{n+1}, \quad i = \overline{0, k-1},$$

откуда с учетом $\psi_{n+1}(0) = \psi_{n+1}(k) = 0$ получим

$$\lambda x_{n+1} = 0. \quad (8)$$

Из (8) следует: а) $\lambda = 0$, $x_{n+1} \neq 0$; б) $\lambda \neq 0$, $x_{n+1} = 0$; в) $\lambda = 0$, $x_{n+1} = 0$. Для случая а) ограничение (4) не нарушается. Для случая б) имеет место $V_{0m}^k u_j(i) = \varepsilon$, $\partial H / \partial u_j(i) = 0$. В последнем уравнении

$$\psi_0 \frac{\partial F^0(i)}{\partial u_j(i)} = \psi_0 \frac{\partial F(i)}{\partial u_j(i)} + \psi_0 \lambda \frac{\partial \varphi(i)}{\partial u_j(i)},$$

где $\varphi(i)$ — левая часть уравнения (5);

$$\frac{\partial \varphi(i)}{\partial u_j(i)} = -\text{sign} \Delta u_j(i+1) + \text{sign} \Delta u_j(i). \quad (9)$$

Из выражения (9) следует

$$\frac{\partial \varphi(i)}{\partial u_j(i)} = \begin{cases} 0, & \text{если } \text{sign} \Delta u_j(i+1) = \text{sign} \Delta u_j(i) \\ \pm 2, & \text{в противном случае} \\ -\text{sign} \Delta u_j(i+1), & \text{если } i=0 \\ \text{sign} \Delta u_j(i), & \text{если } i=k-1 \end{cases}$$

где $\Delta u_j(i+r) = u_j(i+r) - u_j(i+r-1)$, $r = 0, 1$.

При этом если $\Delta u_j(i+1) = 0$, то принимается $\text{sign} \Delta u_j(i+1) = \text{sign} \Delta u_j(z)$, где z определяется из условия $\min\{(z-i) | \Delta u_j(z) \neq 0, z > i\}$.

Если же $\Delta u_j(i) = 0$, то $\text{sign} \Delta u_j(i) = \text{sign} \Delta u_j(z)$, где z выбирается из условия $\min\{(i-z) | \Delta u_j(z) \neq 0, z < i\}$.

Задача с ограничением на изменение векторного управления.

Требуется минимизировать (3) при ограничениях (1), (2) и

$$V_{0m}^k u(i) = \sum_{i=0}^{k-1} \|u(i+1) - u(i)\| \leq \varepsilon, \quad (10)$$

где $\|z\|$ — норма вектора z .

Дополнительно к (1) введем в рассмотрение уравнение

$$u(i+1) = u(i) + v(i) = u(i) + \varphi(v(i)), \quad (11)$$

где $v(i)$ — m -мерный управляющий вектор; φ — m -мерная вектор-функция. Тогда (10) можно представить так: $\sum_{i=0}^{k-1} \|v(i)\| \leq \varepsilon$.

Вводом уравнения (11) по существу $u(i)$ отнесено к разряду фазовых координат, а $v(i)$ — управления, в силу чего размерность фазового пространства стала равной $n+m$.

Выполняя выкладки и преобразования, аналогичные изложенным при решении задачи (1)–(4), получим:

а) когда $\lambda = 0$, $\partial H / \partial u(i) = 0$;

б) когда же $\lambda \neq 0$, $V_{0m}^k u(i) = \varepsilon$, $\partial H / \partial v(i) = 0$.

В последнем уравнении $\frac{\partial H(i)}{\partial v_j(i)} = \psi_0 \lambda \frac{\partial \Omega}{\partial v_j(i)} + \psi_{n+j}(i)$, где $\Omega = V_{0m}^k u(i) - \varepsilon + x_{n+1}^2$; λ — множитель, обеспечивающий выполнение условия $\Omega = 0$; ψ_{n+j} — переменная, сопряженная j -й компоненте вектора $u(i)$.

Если в задаче (1)–(4) φ была недифференцируемой функцией, то Ω дифференцируемая всюду на V функция, где $V = \left\{ v(i) \left| \sum_{i=0}^{k-1} \|v(i)\| \leq \varepsilon, i=0, k-1 \right. \right\}$.

Замечание. В ряде работ с помощью специально сконструированных примеров делаются попытки доказать неприменимость обычного принципа максимума для дискретных систем. Одним из таких примеров является пример: пусть уравнения движения имеют вид

$$\begin{aligned} x_1(i+1) &= x_1(i) + 2u(i), \\ x_2(i+1) &= x_2(i) - x_1^2(i) + u^2(i), \end{aligned} \quad i=0, 1.$$

Требуется для начального состояния $x_1(0)=3, x_2(0)=0$ найти управление $u(i), i=0, 1$, доставляющее показателю качества $J=x_2(2)$ максимальное значение при ограничении $|u(i)| \leq 5$ (пример взят из (6)). В этом примере при разбижке отрезка $[0, 2]$ на два интервала $\max J = J^* = 19$, а „оптимальное“ управление равно: $u^*(0) = -2, u^*(1) = \pm 5$. Функция Гамильтона на первом шаге, т. е. при $u^*(0) = -2$, действительно принимает минимальное значение. Однако если этот же отрезок $[0, 2]$ разбить не на два интервала, а скажем, на четыре, то $J^* = 37$, а оптимальное управление принимает значения: $u^*(0) = -5, u^*(1) = 5, u^*(2) = -5, u^*(3) = 5$. На этом оптимальном управлении функция Гамильтона максимальна. Действительно, соответствующие управлению $|u^*(i)| = 5$ оптимальные $x_1(i)$ и $\psi_1^*(i)$ принимают значения

$$x_1^*(i) = \begin{cases} 3, & \text{при } i=0 \\ -2, & \text{„ } i=1 \\ 3, & \text{„ } i=2 \\ -2, & \text{„ } i=3 \end{cases} \quad \psi_1^*(i) = \begin{cases} -2, & \text{при } i=0 \\ 1, & \text{„ } i=1 \\ -1, & \text{„ } i=2 \\ 2, & \text{„ } i=3 \end{cases}$$

Для этих $x_1^*(i)$ и $\psi_1^*(i)$ функция Гамильтона запишется так:

$$H(u(i)) = \begin{cases} -2 u(0) + 0,5u^2(0) - 4,5, & \text{при } i=0 \\ u(1) + 0,5u^2(1) - 2, & \text{при } i=1 \\ -u(2) + 0,5u^2(2) - 4,5, & \text{при } i=2 \\ 2 u(3) + 0,5u^2(3) - 2, & \text{при } i=3 \end{cases}$$

Нетрудно заметить, что оптимальное управление $u^*(i) = (-1)^{i+1} \times 5$ удовлетворяет условию $\max_{u(i)} H(u(i))$, что и требовалось доказать.

С увеличением числа интервалов на отрезке $[0,2]$ показатель качества увеличивается, а оптимальная траектория принимает вид скользящего режима.

Таким образом, уменьшением шага дискретизации можно добиться выполнения принципа максимума для дискретных систем в общем случае. Обеспечение выполнения принципа максимума для дискретных систем путем изменения шага (если это, конечно, возможно) сопровождается существенным улучшением критерия качества. Следовательно, в дискретных системах выбор шага приобретает качественно иной характер. Эта идея подтверждается не только рассмотренным выше примером, но и всеми существующими в литературе примерами, с помощью которых опровергается обычный принцип максимума.

Когда же шаг дискретизации задается и изменению не подлежит, тогда на оптимальной траектории максимальной должна быть функция $H^0 = H - A$, где

$$A = \int_0^u \frac{\partial H}{\partial \psi} \frac{\partial \psi}{\partial u} du.$$

Доказательство этого утверждения может быть проведено так. Гиперплоскость $(\psi^*, \Delta \bar{x}^*) = 0$ является опорной конусу допустимых вариаций траекторий в его вершине в точке $\bar{x}^*$, следовательно имеет место (6)

$$(\psi^*, \Delta \bar{x}^*) \leq 0, \quad (12)$$

где ψ^* находится из (6). Так как ψ является функцией u (согласно (6)), то

$$\frac{\partial H}{\partial u} = \left(\frac{\partial H}{\partial u} \right) + \frac{\partial H}{\partial \psi} \frac{\partial \psi}{\partial u}. \quad (13)$$

Интегрируя (13), получим

$$\int_0^u \psi \frac{\partial \psi}{\partial u} du = H - A, \quad (14)$$

откуда согласно (12) следует, что справедливо неравенство $\delta H^0 \leq 0$, так как левая часть (14) равна H^0 . Условие $\delta H^0 \leq 0$ является локальным необходимым условием максимума H^0 , следовательно утверждение верно.

Филиал Всесоюзного научно-исследовательского
института по эксплуатации
атомных электростанций

Ս. Վ. ՇԱՀՎԵՐԴՅԱՆ

Կառավարման փոփոխության սահմանափակումով դիսկրետ
համակարգերի օպտիմիզացիա

Դիտարկված են դիսկրետ կառավարման համակարգերի օպտիմիզացման խնդիրներ, երբ սկալյար և վեկտորային կառավարման ֆունկցիաների վրա դրված են սահմանափակումներ: Այդ խնդիրները պարամետրիզացման եղանակներով բերված են դիսկրետ օպտիմալ կառավարման ստանդարտ խնդիրների տեսքի, որոնց համար դուրս են բերված օպտիմալության անհրաժեշտ պայմանները: Ցույց է տրված, որ սովորական մաթեմատիկական պրինցիպը լրիվ կերպով կիրառելի է դիսկրետ համակարգերի համար:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ Н. Н. Красовский, Теория управления движением, Наука, М., 1968. ² Б. Е. Чупрун, Автоматика и телемеханика, № 3, 1975. ³ Б. Е. Чупрун, Автоматика и телемеханика, № 12, 1976. ⁴ С. В. Шахвердян, ДАН АрмССР, т. 75, № 4 (1982). ⁵ А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин, Элементы теории функций и функционального анализа, Наука, М., 1968. ⁶ А. И. Пропой, Элементы теории оптимальных дискретных процессов, Наука, М., 1973.