ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
LXXVI 1983 5

УДК 539.379

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

С. А. Енгибарян

О напряженном состоянии неоднородной по экспоненциальному закону плоскости, ослабленной конечным разрезом

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Б. Л. Абрамяном 17/XII 1982)

Напряженное состояние упругой бесконечной плоскости, содержащей произвольное число разрезов, расположенных на одной прямой линии, исследовано в ([1]). Эта же задача для кусочно-однородной плоскости рассмотрена в ([2]). Обширный класс подобных задач по определению напряженного состояния упругих тел разнообразных геометрических форм, ослабленных разрезами, рассмотрен в ([3,4]), а также в ([5,6,7]).

В настоящей статье обсуждается смешанная задача о напряженном состоянии неоднородной плоскости с разрезом конечной длины, загруженным по своим берегам нормальными силами. При этом считается, что неоднородная плоскость линией разреза разделяется на две полуплоскости, модули упругости которых по глубине изменяются по экспоненциальному закону.

1. Пусть упругая плоскость, отнесенная к системе координат xOy, на отрезке $[-a, a]$ оси Ox ослаблена разрезом, берега которого загружены нормальной нагрузкой произвольной интенсивности $\sigma_0(x)$, т. е. $\sigma_y|_{y=0}=-\sigma_0(x)$. Пусть далее модуль упругости как верхней полуплоскости $y>0$ (полуплоскость I), так и нижней полуплоскости (полуплоскость II) по координате изменяется по экспоненциальному закону $E_i(y)=E_i e^{\alpha|y|}$ ($\alpha>0$, $i=1, 2$), а их коэффициенты Пуассона $\nu_i=\text{const}$ ($i=1, 2$). Требуется определить скачок перемещений на берегах разреза, выражения разрушающих напряжений на продолжении разреза, а также коэффициенты интенсивности последних на концах разреза.

Выведем основные уравнения поставленной задачи. С этой целью введем в рассмотрение функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, характеризующие скачки соответственно горизонтальных ($u_i(x)$, $i=1, 2$) и вертикальных ($v_i(x)$, $i=1, 2$) перемещений на берегах разреза, т. е. положим

$$u_2(x)-u_1(x)=\begin{cases}\varphi(x), & |x|<a\\ 0, & |x|>a\end{cases}; \qquad v_2(x)-v_1(x)=\begin{cases}\psi(x), & |x|<a\\ 0, & |x|>a\end{cases}.$$

Воспользовавшись известными выражениями перемещений граничных точек полуплоскостей ([8]), при помощи преобразования Фурье получим ключевое уравнение задачи

$$\chi(x)=\frac{B}{A^2-\pi^2B^2}\int_{-a}^{a}\frac{\varphi_0(u)du}{u-x}-\frac{iA}{A^2-\pi^2B^2}\varphi_0(x)-\int_{-a}^{a}R(x-u)\varphi_0(u)du-$$

$$-\int_{-a}^{a}R_0(x-u)\overline{\varphi}_0(u)du\qquad(-\infty<x<\infty).\qquad(1.1)$$

Здесь введены обозначения

$$\chi(x)=\tau_*(x)-ip_*(x),\ \varphi_0(x)=\varphi'(x)+i\psi'(x),\ R_0(x-u)=R_2(x-u)+R_3(x-u),$$

$$R(x-u)=R_3(x-u)-R_2(x-u)+i[R_1(x-u)+iR_4(x-u)],\quad R_i(x-u)=$$

$$=\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}G_i(t)e^{-it(x-u)}dt\quad(i=1,\ldots,4),$$

$$G_1(t)=\frac{c_1(t)}{\Delta(t)}-\frac{A}{A^2-\pi^2B^2},\ G_2(t)=\frac{c_2(t)}{\Delta(t)}+\frac{i\pi B}{A^2-\pi^2B^2}\operatorname{sign}t,\quad G_3(t)=$$

$$=\frac{c_3(t)}{\Delta(t)}-\frac{i\pi B}{A^2-\pi^2B^2}\operatorname{sign}t,$$

$$G_4(t)=\frac{c_4(t)}{\Delta(t)}-\frac{A}{A^2-\pi^2B^2},\quad\Delta(t)=c_1(t)\cdot c_4(t)-c_2(t)\cdot c_3(t),$$

$$c_1(t)=\frac{(A+\pi B^0)t^2+[A_1(\beta_2^2+\gamma_1^2)-A_2(\beta_1^2+\gamma_2^2)]\pi}{t^2},\ c_2(t)=\frac{2i\pi(A_1\beta_2-A_2\beta_1)}{t},$$

$$c_3(t)=-i\cdot\frac{2Dt^2+[A_1(2\beta_2-\alpha)(\beta_2^2+\gamma_1^2)-A_2(2\beta_1+\alpha)(\beta_1^2+\gamma_2^2)]\pi}{t^3},$$

$$c_4(t)=\frac{(A+2\pi B^0)t^2+[A_1\beta_2(2\beta_2-\alpha)-A_2\beta_1(2\beta_1+\alpha)]\pi}{t^2},$$

$$A=\frac{1-\nu_1-\nu_1^2}{E_1}-\frac{1-\nu_2-\nu_2^2}{E_2},$$

$$A_1=\frac{1-\nu_1^2}{\pi E_1},\quad A_2=\frac{1-\nu_2^2}{\pi E_2},\quad B=2(A_1+A_2),\quad B^0=A_2-A_1,$$

$$D=\frac{\alpha}{2}\left[\frac{\nu_1(1+\nu_1)}{E_1}+\frac{\nu_2(1+\nu_2)}{E_2}\right],$$

$$\beta_1=\sqrt{\frac{1}{2}\left[t^2+\frac{\alpha^2}{4}+\sqrt{\left(t^2+\frac{\alpha^2}{4}\right)^2+\frac{\nu_2}{1-\nu_2}\alpha^2t^2}\right]}-\frac{\alpha}{2},$$

$$\beta_2=\frac{\alpha}{2}-\sqrt{\frac{1}{2}\left[t^2+\frac{\alpha^2}{4}+\sqrt{\left(t^2+\frac{\alpha^2}{4}\right)^2+\frac{\nu_1}{1-\nu_1}\alpha^2t^2}\right]},$$

$$\gamma_i=\sqrt{\frac{1}{2}\left[-\left(t^2+\frac{\alpha^2}{4}\right)+\sqrt{\left(t^2+\frac{\alpha^2}{4}\right)^2+\frac{\nu_i}{1-\nu_i}\alpha^2t^2}\right]}\quad(i=1,\ 2).$$

Отметим, что

$$p_*(x)=\begin{cases}\sigma_0(x), & |x|<a\\ p(x), & |x|>a\end{cases};\qquad \tau_*(x)=\begin{cases}0, & |x|<a\\ \tau(x), & |x|>a\end{cases}, \tag{1.2}$$

где $p(x)$ и $\tau(x)$ — неизвестные контактные напряжения на продолжении разреза. Отметим также, что вследствие непрерывности перемещений в точках $x=\pm a$ комплексная комбинация скачков перемещений на берегах разреза должна удовлетворять условию

$$\int_{-a}^{a}\varphi_0(x)dx=0, \tag{1.3}$$

так как $\varphi(a)=\varphi(-a)=0$, $\psi(a)=\psi(-a)=0$.

Далее вводя безразмерные координаты

$$x=a\xi,\quad u=a\eta,\quad (-1<\xi,\ \eta<1)$$

и учитывая, что согласно (1.2) $\chi(x)=-i\sigma_0(x)$, при $|x|<a$ придем к следующему интегральному уравнению относительно $\varphi(\xi)$:

$$-\frac{iA}{\pi B}\varphi(\xi)+\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\varphi(\eta)d\eta}{\eta-\xi}-\frac{a(A^2-\pi^2B^2)}{\pi B}\int_{-1}^{1}R(\xi-\eta)\varphi(\eta)d\eta-$$

$$-\frac{a(A^2-\pi^2B^2)}{\pi B}\int_{-1}^{1}R_0(\xi-\eta)\overline{\varphi}(\eta)d\eta=-\frac{i(A^2-\pi^2B^2)}{\pi B}\sigma(\xi) \tag{1.4}$$

при условии

$$\int_{-1}^{1}\varphi(\xi)d\xi=0. \tag{1.5}$$

В (1.4) и (1.5) введены обозначения

$$\varphi_0(x)=\varphi_0(a\xi)=\varphi(\xi),\quad \sigma_0(x)=\sigma_0(a\xi)=\sigma(\xi),$$

$$R(x-u)=R(a(\xi-\eta))=R(\xi-\eta),\quad R_0(x-u)=R_0(a(\xi-\eta))=R_0(\xi-\eta).$$

Теперь поскольку согласно (1.2) $\chi(x)=\tau(x)-ip(x)$ при $|x|>a$, то из (1.1) для определения неизвестных контактных напряжений $p(x)$ и $\tau(x)$ будем иметь формулу

$$\tau(x)-ip(x)=\frac{B}{A^2-\pi^2B^2}\int_{-a}^{a}\frac{\varphi_0(u)du}{u-x}-\int_{-a}^{a}R(x-u)\varphi_0(u)du-\int_{-a}^{a}R_0(x-u)\overline{\varphi}_0(u)du,$$

которая после перехода к безразмерным координатам примет вид

$$\tau_0(\xi)-ip_0(\xi)=\frac{B}{A^2-\pi^2B^2}\int_{-1}^{1}\frac{\varphi(\eta)d\eta}{\eta-\xi}-a\int_{-1}^{1}R(\xi-\eta)\varphi(\eta)d\eta-a\int_{-1}^{1}R_0(\xi-\eta)\overline{\varphi}(\eta)d\eta \tag{1.6}$$

$$(|\xi|>1,\ \tau_0(\xi)=\tau(a\xi),\ p_0(\xi)=p(a\xi)).$$

Таким образом, основными уравнениями задачи будут (1.4) и (1.5).

2. Перейдем к решению этих уравнений. Положив $\frac{A}{\pi B}=\operatorname{th}\mu\pi$, решение уравнения (1.4) представим в виде ряда

$$\varphi(\xi)=\omega^{-1}(\xi)\sum_{n=0}^{\infty}x_n P_n^{(\alpha,\beta)}(\xi) \quad (-1<\xi<1). \tag{2.1}$$

Здесь $P_n^{(\alpha,\beta)}(\xi)$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$ — многочлены Якоби, а $\omega(\xi)=(1-\xi)^{-\alpha}(1+\xi)^{-\beta}$, $\alpha=-\frac{1}{2}-i\mu$, $\beta=-\frac{1}{2}+i\mu$, $\mu=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{\pi B+A}{\pi B-A}$ $\left(0\leqslant\frac{A}{\pi B}<1\right)$.

Из условия (1.5) сразу находим $x_0=0$. С учетом последнего (2.1) подставим в (1.4) и воспользуемся известным ортогональным соотношением (9). В результате, после применения известной процедуры (10), для определения неизвестных коэффициентов $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ получим бесконечную систему линейных алгебраических уравнений

$$x_m+A_m\sum_{n=1}^{\infty}R_{m,n}x_n+A_m\sum_{n=1}^{\infty}R_{m,n}^{(0)}\bar{x}_n=a_m \quad (i=1, 2, \ldots), \tag{2.2}$$

$$R_{m,n}=\frac{\pi^2B^2-A^2}{\pi B}a\int_{-1}^{1}\omega(\xi)P_{m-1}^{(-\alpha,-\beta)}(\xi)d\xi\int_{-1}^{1}R(\xi-\eta)\frac{P_n^{(\alpha,\beta)}(\eta)}{\omega(\eta)}d\eta,$$

$$R_{m,n}^{(0)}=\frac{\pi^2B^2-A^2}{\pi B}a\int_{-1}^{1}\omega(\xi)P_{m-1}^{(-\alpha,-\beta)}(\xi)d\xi\int_{-1}^{1}R_0(\xi-\eta)\frac{P_n^{(\beta,\alpha)}(\eta)}{\bar{\omega}(\eta)}d\eta,$$

$$a_m=\frac{i(\pi^2B^2-A^2)}{\pi B}\int_{-1}^{1}\sigma(\xi)P_{m-1}^{(-\alpha,-\beta)}(\xi)\cdot\omega(\xi)d\xi.$$

Регулярность бесконечной системы (2.2) исследована в (10).

Далее при помощи контурных интегралов Коши установим соотношение

$$\int_{-1}^{1}\frac{P_n^{(\alpha,\beta)}(\eta)d\eta}{(\eta-\xi)\omega(\eta)}=\frac{\pi}{\operatorname{ch}\mu\pi}\left\{P_n^{(\alpha,\beta)}(\xi)\sum_{k=0}^{n-1}\frac{c_k}{\xi^{k+1}}-\frac{P_n^{(\alpha,\beta)}(\xi)\operatorname{sign}\xi}{|\xi-1|^{\frac{1}{2}+i\mu}|\xi+1|^{\frac{1}{2}-i\mu}}\right\} \quad (n=1,2,\ldots), \tag{2.3}$$

$$c_k=\sum_{p=0}^{k}(-1)^p\binom{-\frac{1}{2}-i\mu}{p}\binom{-\frac{1}{2}+i\mu}{k-p} \quad (k=0, 1, 2, \ldots), \quad \binom{a}{p}=\frac{a!}{p!(a-p)!}.$$

Теперь, подставляя (2.1) в (1.6) и учитывая (2.3), будем иметь

$$\tau_0(\xi)-ip_0(\xi)=\frac{\pi B}{(A^2-\pi^2B^2)\operatorname{ch}\mu\pi}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}x_nP_n^{(\alpha,\beta)}(\xi)\sum_{k=0}^{n-1}\frac{c_k}{\xi^{k+1}}-|\xi-1|^{\alpha}|\xi+1|^{\beta}\operatorname{sign}\xi\sum_{n=1}^{\infty}x_nP_n^{(\alpha,\beta)}(\xi)\right\}-a\sum_{n=1}^{\infty}x_n\int_{-1}^{1}\frac{R(\xi-\eta)P_n^{(\alpha,\beta)}(\eta)d\eta}{\omega(\eta)}-$$

$$-a\sum_{n=1}^{\infty}\bar{x}_n\int_{-1}^{1}\frac{R_0(\xi-\eta)P_n^{(\beta,\alpha)}(\eta)d\eta}{\bar{\omega}(\eta)}, \quad (|\xi|>1). \tag{2.4}$$

При помощи (2.4) вычислим коэффициенты интенсивностей, напряжений $\tau_0(\xi)$, $p_0(\xi)$ в точках $\xi=\pm 1$. Получим

$$k_1=\lim_{\xi\to -1}[\tau_0(\xi)-ip_0(\xi)]|\xi+1|^{-\beta}=\frac{2^{-\frac{1}{2}-i\mu}\pi B}{(A^2-\pi^2B^2)\operatorname{ch}\mu\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}+i\mu\right)}{n!\Gamma\left(\frac{1}{2}+i\mu\right)}x_n,$$

$$k_2=\lim_{\xi\to 1}[\tau_0(\xi)-ip_0(\xi)]|\xi-1|^{-\alpha}=\frac{-2^{-\frac{1}{2}+i\mu}\pi B}{(A^2-\pi^2B^2)\operatorname{ch}\mu\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}-i\mu\right)}{n!\Gamma\left(\frac{1}{2}-i\mu\right)}x_n, \tag{2.5}$$

где использованы значения $P_n^{(\alpha,\beta)}(\pm 1)$.

Рассмотрим частный случай, когда $\alpha=0$ (случай кусочно-однородных полуплоскостей). В этом случае

$$\beta_1=|t|,\quad \beta_2=-|t|,\quad \gamma_1=\gamma_2=0,\quad D=0,\quad R(x-u)=R_0(x-u)=0$$

и интегральное уравнение (1.4) имеет вид

$$-i\frac{A}{\pi B}\varphi(\xi)+\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\varphi(\eta)d\eta}{\eta-\xi}=G(\xi),\qquad G(\xi)=-\frac{i}{\pi}\cdot\frac{A^2-\pi^2B^2}{B}\sigma(\xi),$$

а уравнение (2.4) — вид

$$\tau_0(\xi)-ip_0=\frac{2\pi B}{A^2-\pi^2B^2}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}a_{n-1}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{c_kP_n^{(\alpha,\beta)}(\xi)}{\xi^{k+1}}-|\xi-1|^{\alpha}|\xi+1|^{\beta}\operatorname{sign}\xi\sum_{n=1}^{\infty}a_{n-1}P_n^{(\alpha,\beta)}(\xi)\right\}$$

$$(|\xi|>1), \tag{2.6}$$

где

$$a_n=\frac{[(n+1)!]^2}{2\Gamma\left(n+\frac{3}{2}+i\mu\right)\Gamma\left(n+\frac{3}{2}-i\mu\right)}\int_{-1}^{1}G(\xi)P_n^{\left(\frac{1}{2}+i\mu,\ \frac{1}{2}-i\mu\right)}(\xi)\cdot(1-$$

$$-\xi)^{\frac{1}{2}+i\mu}(1+\xi)^{\frac{1}{2}-i\mu}d\xi\quad (n=0,1,2,\ldots).$$

В разбираемом случае $x_n=2\operatorname{ch}\mu\pi\cdot a_{n-1}$ $(n=1,2,\ldots)$ и формулы (2.5) дают

$$k_1=\frac{2^{\frac{1}{2}-i\mu}\pi B}{A^2-\pi^2B^2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}+i\mu\right)}{n!\Gamma\left(\frac{1}{2}+i\mu\right)}a_{n-1},$$

$$k_2=-\frac{2^{\frac{1}{2}+i\mu}\pi B}{A^2-\pi^2B^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}-i\mu\right)}{n!\Gamma\left(\frac{1}{2}-i\mu\right)}a_{n-1}. \tag{2.7}$$

Эти же выражения $k_i (i=1, 2)$ непосредственно получаются из (2.6). Формулы (2.7) вытекают также из результатов работы ([2]).

Автор выражает свою признательность С. М. Мхитаряну за постановку задачи и руководство работой.

Институт механики
Академии наук Армянской ССР

Ս. Ա. ԽՆԳԻԲԱՐՅԱՆ

Էքսպոնենցիալ օրենքով անհամասեռությամբ օժտված և վերջավոր ճեղքով թուլացված հարթության լարվածային վիճակի մասին

Դիտարկվում է վերջավոր երկարությամբ ճեղքով թուլացված, անհամասեռ հարթության լարվածադեֆորմացիոն վիճակը, երբ այն բեռնավորված է ճեղքի ափերին տրված նորմալ լարումներով։

Ընդունվում է, որ ճեղքի երկարությամբ բաժանված կիսահարթությունների առաձգական հաստատուններից Յունգի մոդուլը փոփոխվում է ըստ խորության էքսպոնենցիալ օրենքով։ Ստացված է խնդրի բնութագրիչ հավասարումը, որից ստացվում են ինտեգրալ հավասարում ճեղքի ափերի կետերի տեղափոխության թռիչքի համար և ճեղքի եզրերում քայքայող լարումների արտահայտությունները։ Ինտեգրալ հավասարման լուծումը բերված է հանրահաշվական հավասարումների անվերջ սիստեմի լուծման։ Գտնված են ճեղքի ծայրերի լարումների ինտենսիվության գործակիցները։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Н. И. Мусхелишвили*, Некоторые основные задачи математической теории упругости, Наука, М., 1966. [2] *Г. П. Черепанов*, Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение, № 1, 1962. [3] *Г. П. Черепанов*, Механика разрушения, Машиностроение, М., 1977. [4] *В. З. Партон, Е. М. Морозов*, Механика упруго-пластического разрушения, Наука, М., 1974. [5] *M. Comninou, D. Schmueser*, J. of Applied Mechanics, vol. 46, №2 (1979). [6] *K. N. Srivastava, O. P. Gupta, R. M. Palayia*, Int. J. of fracture, vol. 14 (1978). [7] *G. B. Sinclair*, Int. J. of fracture, vol. 16 (1980). [8] *H. Bufler, A. Steyerl*, Ingenieur-Archiv, Band 32, Heft 5 (1963). [9] *Г. Я. Попов*, ПММ, т. 30, вып. 5 (1966). [10] *Н. Х. Арутюнян, С. М. Мхитарян*, ПММ, т. 39, вып. 5 (1975).