ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXVI 1983 5

УДК 519.44

МАТЕМАТИКА

С. В. Айвазян

О некоторых бесконечных цепях многообразий групп

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. А. Александряном 28/VI 1982)

Пусть $\mathbf{R}$—произвольное многообразие групп и V—соответствующая вербальная подгруппа свободной группы счетного ранга $F_\infty = gp(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$, где $x_i (i=1, 2, \ldots, n, \ldots)$ свободные образующие этой группы. Обозначим через $\mathbf{R}^{(n)}$ многообразие, определенное множеством V_n всех тождеств от n переменных многообразия $\mathbf{R}$. Очевидно $V_{n-1} \subseteq V_n$ для всех n и $V = \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n$. Поэтому имеют место включения:

$$\mathbf{R}^{(1)} \geqslant \mathbf{R}^{(2)} \geqslant \ldots \geqslant \mathbf{R} = \bigcap_{i=1}^{\infty} \mathbf{R}^{(i)} \tag{1}$$

В связи с цепью (1) естественно возникает вопрос: какие случаи распределения знаков равенства и строгого включения возможны в (1)? Такой вопрос, в частности, был поставлен в работе ([1]), где изучалась аналогичная (1) цепь для многообразий полугрупп и было показано, что начиная со второго места такой цепи возможно, вообще говоря, любое распределение знаков, а именно: для произвольного множества S натуральных чисел, отличных от единицы, существует такое многообразие полугрупп $\mathbf{R}$, что для всякого $n \geqslant 2$ $\mathbf{R}^{(n)} = \mathbf{R}^{(n+1)} \Leftrightarrow n \in S$.

Для групп первый пример многообразия, у которого в цепи (1) между двумя знаками строгого включения стоит знак равенства, был приведен в работе ([2]): $\mathbf{R} = \mathbf{A}\mathbf{N}_2 \cap \mathbf{N}_6$, и цепь (1) в этом случае имеет вид: $\mathbf{R}^{(1)} > \mathbf{R}^{(2)} > \mathbf{R}^{(3)} > \mathbf{R}^{(4)} = \mathbf{R}^{(5)} > \mathbf{R}^{(6)} = \mathbf{R}$.

В работе ([3]) сформулированный выше вопрос полностью решается для конечных цепей (1), а именно, показано, что при подходящем выборе нильпотентного класса $\leqslant c$ многообразия $\mathbf{R}$ любая последовательность равенств и строгих включений может быть реализована в цепи $\mathbf{R}^{(1)} \geqslant \mathbf{R}^{(2)} \geqslant \ldots \geqslant \mathbf{R}^{(c+1)} = \mathbf{R}$.

В настоящей работе показывается, что при подходящем выборе подмногообразия $\mathbf{R}$ многообразия $\mathbf{A}_2^4$ в цепи (1) начиная с восьмого места можно реализовать любую последовательность, точнее, будет доказана

Теорема. *Пусть $S \subseteq \{8, 9, \ldots, k, k+1, \ldots\}$. Тогда существует такое многообразие групп $\mathbf{R}$, что для всякого $n \geqslant 8$ $\mathbf{R}^{(n)} = \mathbf{R}^{(n+1)} \Leftrightarrow n \in S$.*

Поскольку каждое периодическое многообразие групп является многообразием полугрупп, построенные нами многообразия одновременно являются и многообразиями полугрупп.

Отметим, что в наших обозначениях $\mathbf{A}$—многообразие всех абелевых групп, $\mathbf{A}_2$—многообразие всех групп экспоненты 2, $\mathbf{N}_c$—многообразие всех нильпотентных групп класса нильпотентности $\leqslant c$, $F_n(\mathbf{R})$—свободная группа ранга n многообразия $\mathbf{R}$, $F_n = gp(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Для произвольного слова $v(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in F_\infty$ и группы G через $v[G]$ обозначим множество всех значений слова v в G, т. е. $v[G] = \{v(g_1, g_2, \ldots, g_n) | g_i \in G\}$. Через $v(G)$, как обычно, обозначим вербальную подгруппу $gp(v[G])$.

Говорят, что система тождеств $\{u_n(x) \equiv 1\}_{n \geqslant 1}$ (слов $u_n(x)$) независима в многообразии $\mathbf{R}$, если она не эквивалентна в многообразии $\mathbf{R}$ ни одной своей собственной подсистеме.

Слово $u(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in F_\infty$ назовем исчезающим в многообразии $\mathbf{R}$, если $u(F_n(\mathbf{R})) \neq 1$, но $u(F_{n-1}(\mathbf{R})) = 1$.

Систему слов $\{u_n(x_1, x_2, \ldots, x_{m_n})\}_{n \geqslant 1}$ назовем исчезающей в многообразии $\mathbf{R}$, если каждое слово $u_n(x_1, \ldots, x_{m_n})$ является исчезающим в этом многообразии.

Основная лемма. *Пусть* $\mathbf{R}^{(m)} = \mathbf{R}^{(m+1)} = \ldots = \mathbf{R}$ *и пусть в* $\mathbf{R}$ *существует бесконечная независимая исчезающая система слов* $\{u_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)\}_{n \geqslant m}$. *Тогда для любого подмножества* P *множества* $Q = \{m, m+1, \ldots\}$ *существует многообразие* $\mathbf{R}_P \subseteq \mathbf{R}$ *такое, что для всякого* $n \geqslant m$ $\mathbf{R}_P^{(n)} = \mathbf{R}_P^{(n+1)} \Leftrightarrow n \in P$.

Доказательство. Рассмотрим произвольное подмногообразие $\mathfrak{M} \subseteq \mathbf{R}$, фиксируем некоторое число k и обозначим через $\mathbf{N}$ многообразие, полученное добавлением к тождествам $\mathfrak{M}$ какого-то множества тождеств вида $\{u_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv 1\}_{n > k}$. Покажем, что $\mathfrak{M}^{(l)} = \mathbf{N}^{(l)}$ при $l \leqslant k$. Для этого обозначим через V_n, M_n, N_n множества всех слов от не более чем n переменных, являющихся тождествами соответственно в $\mathbf{R}$, $\mathfrak{M}$, $\mathbf{N}$. По определению исчезающего слова $u_n(F_l) \subseteq \subseteq V_l$ при $n > l$. Но $V_l \subseteq M_l \subseteq N_l$, следовательно, $M_l \subseteq N_l \subseteq M_l \cdot \prod_{n>k} u_n(F_l)$, а это и означает, что $\mathfrak{M}^{(l)} = \mathbf{N}^{(l)}$ при всех $l \leqslant k$.

Предположим теперь, что $\mathfrak{M}^{(k)} = \mathfrak{M}^{(k+1)} = \ldots = \mathfrak{M}$ и что для некоторого $n > k$ тождество $u_n(x) \equiv 1$ не выполняется в $\mathfrak{M}$.

Рассмотрим, как изменится цепь (1) для многообразия $\mathfrak{M}$ при добавлении к его тождествам тождества $u_n(x) \equiv 1$. Обозначая получившееся таким образом многообразие через $\mathbf{N}$, в силу сказанного выше получаем, что $\mathbf{N}^{(l)} = \mathfrak{M}^{(l)}$ при $l \leqslant n-1$, с другой стороны, из включения $u_n(x) \in F_n$ следуют равенства $\mathbf{N}^{(n)} = \mathbf{N}^{(n+1)} = \ldots = \mathbf{N}$. Мы видим, что знаки в цепи вида (1) для $\mathfrak{M}$ не изменились до $(n-1)$-го места и после $(n-1)$-го места. В то же время на $(n-1)$-ом месте возникает скачок: $\mathbf{N}^{(n-1)} > \mathbf{N}^{(n)}$, поскольку по предположению $M_n \supsetneqq u_n(F_n)$, и значит $N_n = M_n \cdot u_n(F_n) = M_{n-1}(F_n) u_n(F_n) = N_{n-1}(F_n) \cdot \cdot u_n(F_n) \supsetneqq M_n = M_{n-1}(F_n) = N_{n-1}(F_n)$

Резюмируя, можно сказать, что в описанной ситуации наложение дополнительного тождества $u_n(x) \equiv 1$ производит в распределении знаков цепи вида (1) для $\mathfrak{M}$ в точности следующее изменение: знак равенства, стоящий на $(n-1)$-ом месте, заменяется на знак строгого включения.

Из всего сказанного выше непосредственно следует, что в качестве многообразия $\mathbf{R}_P$ достаточно взять подмногообразие, определенное в $\mathbf{R}$ системой тождеств $\{u_n(x)\equiv 1 | n-1 \in Q \setminus P\}$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы. Положим $\mathbf{R}=(\mathbf{N}_2 \cap \mathbf{A}_2^2)\mathbf{A}_2^2$. Так как $\mathbf{R}=\mathbf{N}_2\mathbf{A}_2^2 \cap \mathbf{A}_2^4$, то из утверждений 34. 23 и 34. 25 ([4]) следует, что $\mathbf{R}$ определяется тождествами

$$[(x_1^2x_2^2)^2,\ (x_3^2x_4^2)^2,\ (x_5^2x_6^2)^2]\equiv 1,\quad (((x_1^2x_2^2)^2(x_3^2x_4^2)^2)^2((x_5^2x_6^2)^2(x_7^2x_8^2)^2)^2)^2\equiv 1,$$

т. е. $\mathbf{R}=\mathbf{R}^{(8)}$. Положим $u_n(x)=[x_1^2, x_2, \ldots, x_n]$, тогда, как показывает основная лемма, теорема является непосредственным следствием двух следующих утверждений:

Лемма 1. *Система тождеств* $\{u_n^4(x)\equiv 1_{n\geqslant 2}$ *является исчезающей в многообразии* $\mathbf{R}$.

Лемма 2. *Система тождеств* $\{u_n^4(x)\equiv 1\}_{n\geqslant 2}$ *независима в многообразии* $\mathbf{R}$.

При доказательстве этих лемм используются результаты из работы ([5]).

Автор выражает благодарность Ю. Г. Клейману за постановку задачи.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Ս. Վ. ԱՅՎԱԶՅԱՆ

Խմբերի բազմաձևությունների որոշ անվերջ շղթաների մասին

Դիտարկվում է հետևյալ շղթան.

$$\mathbf{R}^{(1)} \geqslant \mathbf{R}^{(2)} \geqslant \ldots \geqslant \mathbf{R} = \bigcap_{i=1}^{\infty} \mathbf{R}^{(i)},$$

որտեղ՝ $\mathbf{R}^{(i)}$*-ն խմբերի այն բազմաձևությունն է, որը համապատասխանում է խմբերի* $\mathbf{R}$ *բազմաձևության* i *փոփոխականներից կախված նույնությունների համակարգին։*

Քննարկվում է այդ շղթայում հավասարության և խիստ անհավասարության նշանների բաշխման հարցը։ Ապացուցվում է, որ սկսած ութերորդ տեղից հնարավոր է այդ նշանների ցանկացած բաշխում։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *B. Jonsson, G. Mcnulty, R. Quakenbush,* Can. J. Math., vol. 27, № 1 (1975). [2] *N. Gupta, F. Levin, A. Rhemtulla,* Can. J. Math., vol. 26, № 1 (1974). [3] *N. Gupta, F. Levin,* Math. Scientist., vol. 4, p. 109—111 (1979). [4] *Х. Нейман,* Многообразия групп, Мир, М., 1969. [5] *Ю. Г. Клейман,* ДАН СССР, т. 244, № 4 (1979).