ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXVI 1983 5

УДК 512:86

МАТЕМАТИКА

А. Д. Туниев

Обобщенная частично-обратная матрица, ее свойства и применение

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. Р. Варшамовым 30/V 1982)

В работе вводится понятие обобщенной частично-обратной (частично-псевдообратной) матрицы, которое является обобщением псевдообратной матрицы Мура—Пенроуза. Алгебраической основой вводимого понятия является обобщенный метод полного исключения Жордана—Гаусса ([1]).

Показано, что частично-обратная матрица позволяет расширить возможности известного метода обратной матрицы для решения задачи линейного программирования.

Здесь мы используем обозначения из ([2]), которые приведены также в ([1,3]).

1°. Пусть M и N два множества. Рассмотрим матричное уравнение

$$a[M,\ N]x[N,\ M]=e[M,\ M], \tag{1}$$

где $e[M,\ M]$ — единичная матрица.

Помножив слева (1) на $(a[M,\ N])^T$, получим нормальное матричное уравнение

$$b[N,\ N]x[N,\ M]=(a[M,\ N])^T. \tag{2}$$

Пусть $N=K$. Зададим разбиение $K=\{K_1,\ K_2,\ \ldots,\ K_\tau\}$, где $K_i\cap\cap K_j=\varnothing$, $i\neq j$.

При заданном разбиении $K=\{K_1,\ K_2,\ \ldots,\ K_\tau\}$, применив к системе (2) обобщенный метод полного исключения ([3]), через τ ($\tau\leqslant r$; r — ранг $a[M,\ N]$) итераций получим систему вида

$$p[N,\ N]x[N,\ M]=\tilde{a}[N,\ M],$$

где

$$p[N,\ N]=\begin{bmatrix} p[K_1,\ K_1],\ p[K_1,\ K_2],\ \ldots,\ p[K_1,\ K_\tau], \\ 0[K_2,\ K_1],\ p[K_2,\ K_2],\ \ldots,\ p[K_2,\ K_\tau], \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ 0[K_\tau,\ K_1],\ 0[K_\tau,\ K_2],\ \ldots,\ p[K_\tau,\ K_\tau]. \end{bmatrix}$$

Теорема 1. *Матрица* $\tilde{a}[N,\ M]$ *и ее подматрица* $\tilde{a}[K_s,\ M]$ ($s=1,\ 2,\ \ldots,\ \tau$) *обладают следующими свойствами:*

1. $a[M,\ N]\tilde{a}[N,\ M]a[M,\ N]=a[M,\ N]$;

2. $\tilde{a}[N,\ M]a[M,\ N]\tilde{a}[N,\ M]=\tilde{a}[N,\ M]$;

3. $a[M, N]\tilde{a}[N, M] = (a[M, N]\tilde{a}[N, M])^T$;

4. *Матрица* $p[K_s, K_s] = \tilde{a}[K_s, M]a[M, K_s]$ $(s = 1, 2, \ldots, \tau)$ *симметричная и идемпотентная;*

5. $\tilde{a}[K_s, M]a[M, K_j] = 0[K_s, K_j]$, $j < s$, $(s = 2, 3, \ldots, \tau)$;

6. $\tilde{a}[K_i, M]a[M, K_s]\tilde{a}[K_s, M]a[M, K_s] = 0[K_i, K_s], i < s, (s = 2, 3, \ldots, \tau)$;

7. *Матрица* $\tilde{a}[N, M]$ *при заданном разбиении* $K = \{K_1, K_2, \ldots, K_\tau\}$ *является единственной.*

Пусть при некотором векторе $b[N]$

$$x^0[N] = \tilde{a}[N, M]a[M, N]b[N] = p[N, N]b[N].$$

Тогда $x^0[N]$ является проекцией вектора $b[N]$ на образ матрицы $p[N, N]$ параллельно ядру $a[M, N]$. Кроме того $x^0[K_s]$ ортогонален ядру Y_{K_s} матрицы $a[M, K_s]$ $(s = 1, 2, \ldots, \tau)$, а следовательно, и ядру $Y_K = \{Y_{K_1}, Y_{K_2}, \ldots, Y_{K_\tau}\}$. При $K_1 = N$ матрица $\tilde{a}[K_1, M]$ является псевдообратной, а $p[K_1, K_1]$—матрицей ортогонального проектирования, поэтому естественно при $K = \{K_1, K_2, \ldots, K_\tau\}$ $\tilde{a}[N, M]$ назвать частично-псевдообратной матрицей для $a[M, N]$, а $p[N, N]$—матрицей частично-ортогонального проектирования.

Следствие. Пусть при $K = \{K_1, K_2, \ldots, K_\tau\}$ и $K' = \{K'_{d_1}, K_{d_2}, \ldots, K'_{d_l}\}$ $\tilde{a}[K, M]$ и $\tilde{a}[K', M]$ частично-псевдообратные матрицы, где $K_i \cap K_j = \varnothing$, $N = K$,

$$K'_{d_s} = \{K_{d_{s-1}+1}, K_{d_{s-1}+2}, \ldots, K_{d_l}\} \quad (s = 1, 2, \ldots, l),$$

при $s = 1, l$; $K_{d_0+1} = K_1$, $K_{d_l} = K_\tau$.

Тогда $\|x^0[K]\| \geqslant \|x'[K']\|$, где

$$x^0[K] = \tilde{a}[K, M]b[M], \quad x'[K'] = \tilde{a}[K', M]b[M].$$

Если $a[M, N]$ матрица полного ранга, то $\tilde{a}[N, M]$—частично-обратная матрица.

2°. Рассмотрим задачу линейного программирования. Требуется максимизировать линейную форму

$$c[N]x[N]$$

при условиях

$$a[M, N]x[N] = a[M, 0], \quad x[N] \geqslant 0[N],$$

где $a[M, N]$ матрица полного ранга.

Теорема 2. *Пусть* $K \subseteq N$. *Зададим разбиение*

$$K = \{K_1, K_2, \ldots, K_\tau\}, \quad K_i \cap K_j = \varnothing, \quad i \neq j.$$

Обозначим через $\tilde{a}[K, M]$ *частично-обратную матрицу для матрицы* $a[M, K]$ *и пусть* $x^0[K] = \tilde{a}[K, M]a[M, 0] \geqslant 0[K]$.

Тогда

а) $\Delta[j] = c[K]x^0[K, j] - c[j] = \lambda^0[M]a[M, j] - c[j]$, $j \in N$,

где $x^0[K, j] = \tilde{a}[K, M]a[M, j]$, $\lambda^0[M] = c[K]\tilde{a}[K, M]$;

б) *если оценки* $\Delta[j]\geqslant 0$, $j\in N$, *то* $\{x^0[K], 0[N\setminus K]\}$ *оптимальный план исходной задачи.*

Таким образом с учетом (3) можно предложить расширенный вариант метода обратной матрицы решения задачи линейного программирования.

Наконец, на наш взгляд, введенное понятие частично-псевдообратной матрицы позволит обобщить представление решения задачи среднеквадратической оптимизации (4).

Научно-производственное объединение Министерства
местной промышленности Армянской ССР

Ա. Դ. ԹՈՒՆԻԵՎ

Ընդհանրացված մասնակի-պսևդոհակադարձ մատրիցան, նրա հատկությունները և կիրառումը

Աշխատանքում ներմուծվում է ընդհանրացված մասնակի-պսևդոհակադարձ մատրիցայի գաղափարը, որը հանդիսանում է պսևդոհակադարձ մատրիցայի հայտնի գաղափարի ընդհանրացումը։

Ներմուծվող գաղափարի, նրա հատկությունների և հաշվումների բացահայտման հանրահաշվական հիմքը հանդիսանում է Ժորդան—Գաուսի լրիվ բացառման ընդհանրացված մեթոդը։

Ցույց է տրված, որ այս մեթոդը ընդլայնում է գծային ծրագրավորման խնդրի լուծման համար հակադարձ մատրիցայի հայտնի մեթոդի հնարավորությունները։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *А. Д. Туниев*, ДАН АрмССР, т. 76, № 4 (1983). [2] *И. В. Романовский*, Алгоритмы решения экстремальных задач, Наука, М., 1977. [3] *А. Д. Туниев*, ДАН АрмССР, т. 71, № 4 (1980). [4] *А. Алберт*, Регрессия, псевдорегрессия и рекуррентное оценивание, Наука, М., 1977.