

УДК 66.067.52 : 637.232.152

ГИДРОМЕХАНИКА

Дж. С. Торосян

Исследование формы свободной поверхности
однородной жидкости в роторах цилиндрических
центрифуг

(Представлено чл.-корр АН Армянской ССР А. М. Габриеляном 29/XII 1983)

Характер состояния жидкости на свободной поверхности ротора центрифуги имеет решающее значение для процесса осадительного центрифугирования, так как подлежащая разделению жидкость в основном течет внутри ротора тонким поверхностным слоем вдоль оси вращения (^{1,2}).

Рассмотрим частично заполненный идеальной жидкостью ротор, который движется с постоянной угловой скоростью вокруг оси вращения. Обозначим радиус невозмущенной свободной поверхности через R_0 , а внутренний радиус ротора — R . Пусть центробежные силы инерции являются внешними силами и движение жидкости в начальный момент потенциальное. Тогда скорость жидкости определяется через градиент потенциала скорости φ и уравнение неразрывности обратится в уравнение Лапласа (³⁻⁶).

Введем цилиндрическую систему координат, направив ось oz по оси вращения ротора центрифуги, и представим потенциал скорости в виде

$$\varphi(r, z, \theta) = \Phi(r, z, \theta) \cos(\sigma t + \varepsilon), \quad (1)$$

где $\Phi(r, z, \theta)$ — функция, описывающая зависимость амплитуды от цилиндрических координат r, z и θ ; σ — круговая частота; t — время; ε — начальная фаза.

Подставив (1) в уравнение Лапласа, будем иметь

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} = 0. \quad (2)$$

Решение (2) представим в виде

$$\Phi(r, z, \theta) = R(r) \Theta(\theta) Z(z), \quad (3)$$

где $R(r)$, $\Theta(\theta)$ и $Z(z)$ — неизвестные функции, зависящие от цилиндрических координат.

Подставив (3) в уравнение (2) и проведя преобразования, получим

$$r^2 \frac{Z''(z)}{Z(z)} + r^2 \frac{R''(r)}{R(r)} + r \frac{R'(r)}{R(r)} = - \frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)}. \quad (4)$$

Равенство (4) возможно тогда, когда обе части функции равны одной и той же постоянной, которую обозначим через n^2 . Тогда (4) распадается на два уравнения:

$$\frac{Z''(z)}{Z(z)} + \frac{R''(r)}{R(r)} + \frac{1}{r} \frac{R'(r)}{R(r)} - \frac{n^2}{r^2} = 0; \quad (5)$$

$$\Theta''(\theta) + n^2 \Theta(\theta) = 0. \quad (6)$$

Уравнение (5) будет удовлетворено, если положить:

$$R''(r) + \frac{1}{r} R'(r) + \left(m^2 - \frac{n^2}{r^2} \right) R(r) = 0; \quad (7)$$

$$Z''(z) - m^2 Z(z) = 0, \quad (8)$$

где m — произвольное действительное число.

Таким образом, решение уравнения (2) можно представить в виде

$$\Phi(r, z, \theta) = [AJ_n(mr) + BY_n(mr)]e^{\pm mz}e^{\pm i n \theta}, \quad (9)$$

где $J_n(mr)$ — бесселева функция первого рода порядка n ; $Y_n(mr)$ — бесселева функция второго рода порядка n ; A и B — произвольные постоянные.

Используя граничные условия, найдем дисперсионное соотношение. Для формулировки граничного условия на свободной поверхности жидкости в роторе центрифуги воспользуемся уравнением Эйлера для рассматриваемого случая, которое можно привести к интегралу Коши-Лагранжа:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} - \frac{\omega^2 r^2}{2} = f(t), \quad (10)$$

где p и ρ — давление и плотность жидкости; r — радиус рассматриваемого слоя жидкости; $f(t)$ — произвольная функция.

Пренебрегая квадратом скорости в (10) из-за ее малости по сравнению с остальными членами, введя произвольную функцию $f(t)$ в потенциал скорости φ и считая давление жидкости постоянным, равным давлению воздуха над жидкостью (⁴⁻⁶), после преобразования найдем

$$\frac{p - p_0}{\rho} = -\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\omega^2 r^2}{2} = 0. \quad (11)$$

Откуда, полагая уравнение свободной поверхности в роторе центрифуги в произвольный момент времени $r = \xi(r, \theta, t)$, найдем

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{1}{2} \omega^2 \xi^2(r, \theta, t). \quad (12)$$

Так как частицы жидкости, находящиеся на поверхности, не могут перейти вдоль радиуса внутрь жидкости, а будут находиться все время на свободной поверхности, из этого условия с учетом (12) имеем

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{1}{\omega^2 R_0} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}. \quad (13)$$

где $R_0 = \xi(r, \theta, 0)$ — радиус невозмущенной поверхности жидкости.

Из условия, что на внутренней поверхности ротора центрифуги нормальная составляющая скорости жидкости равна нулю, получим

$$\left. \frac{\partial \zeta}{\partial r} \right|_{r=R} = 0. \quad (14)$$

Тогда на основании (1) условия (13) и (14) запишем в виде:

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\sigma^2}{\omega^2 R_0} \Phi(r, \theta, z) \right|_{r=R_0} = 0; \quad (15)$$

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right|_{r=R} = 0. \quad (16)$$

Подставляя значение (9) в граничные условия (15) и (16), получим:

$$[AJ'_n(mR_0) + BY'_n(mR_0)] + \frac{\sigma^2}{\omega^2 R_0 m} [AJ_n(mR_0) + BY_n(mR_0)] = 0; \quad (17)$$

$$[AJ'_n(mR) + BY'_n(mR)] = 0. \quad (18)$$

Полученная система однородных линейных уравнений (17) и (18) относительно A и B имеет ненулевое решение только в том случае, если определитель системы равен нулю:

$$\begin{vmatrix} J'_n(mR_0) + bJ_n(mR_0) & Y'_n(mR_0) + bY_n(mR_0) \\ J'_n(mR) & Y'_n(mR) \end{vmatrix} = 0, \quad (19)$$

где $b = \frac{\sigma^2}{\omega^2 R_0 m}$

Из (19) найдем

$$\sigma^2 = \omega^2 R_0 m \frac{J'_n(mR)Y'_n(mR_0) - J'_n(mR_0)Y'_n(mR)}{J_n(mR_0)Y'_n(mR) - J_n(mR)Y'_n(mR_0)}. \quad (20)$$

Откуда следует, что круговая частота зависит от напряженности поля центробежных сил инерции, радиусов заполнения жидкостью ротора и произвольного числа m . Из полученных результатов следует, что уравнение свободной поверхности жидкости в частично заполненном роторе можно определить выражением

$$\xi = R_0 + a \sin(n\theta - \sigma t), \quad (21)$$

где a — амплитуда стоячей волны.

В качестве примера на рис. 1 приведены изображения, полученные при фиксировании сечения формы свободной поверхности жидкости в частично заполненном цилиндрическом роторе с внутренним диаметром $R = 0,135$ м, высотой 0,1 м при радиусе заполнения $R_0 = 0,08$ м. Ротор надевали на вертикальный вал центробежного сепаратора, угловую скорость вращения которого можно было плавно изменять. Просвеченную фотобумагу прикладывали с внутренней стороны плоской крышки ротора. В качестве жидкости использовали закрепитель, который при заданной угловой скорости вращения заливали определен-

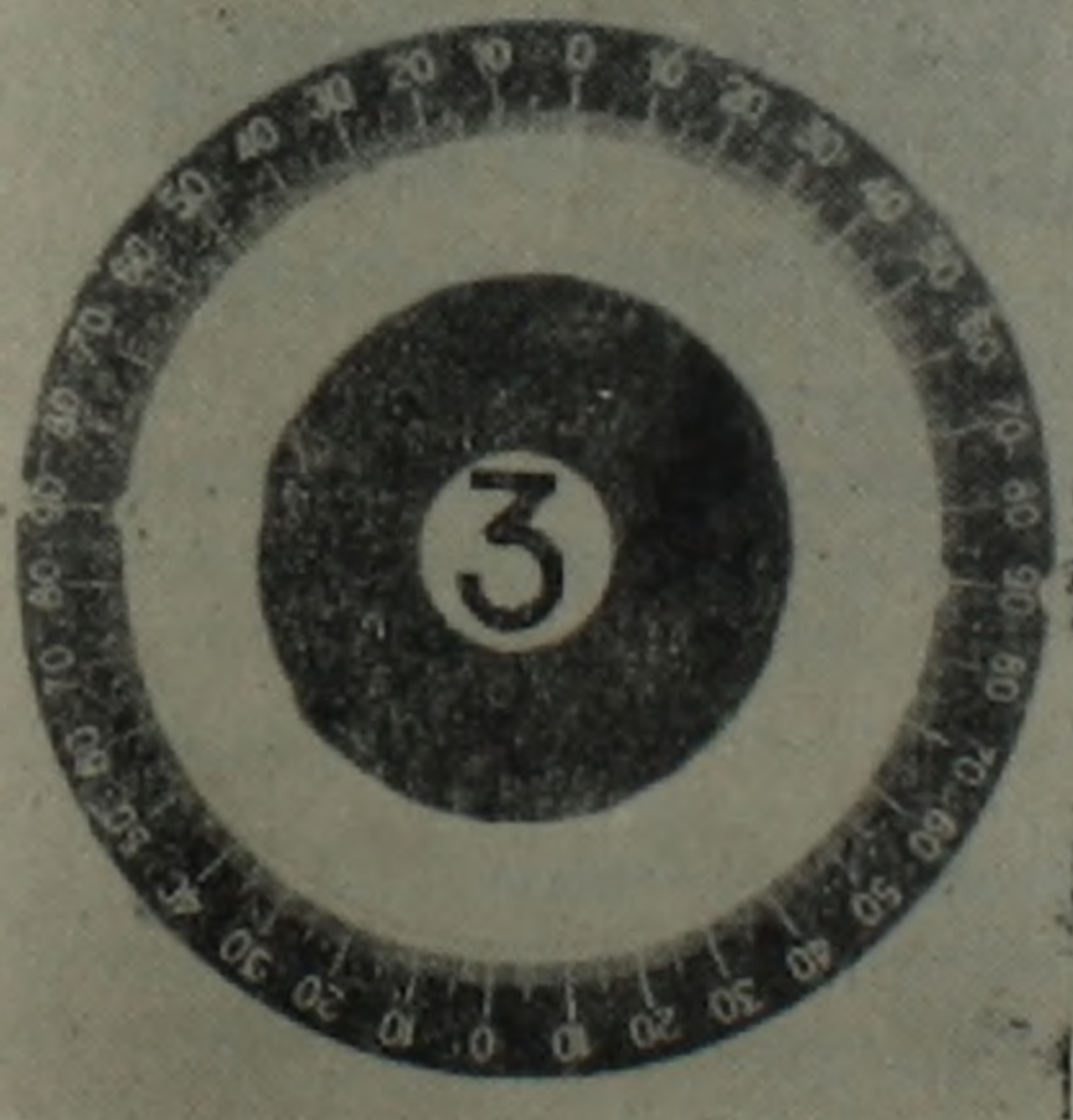
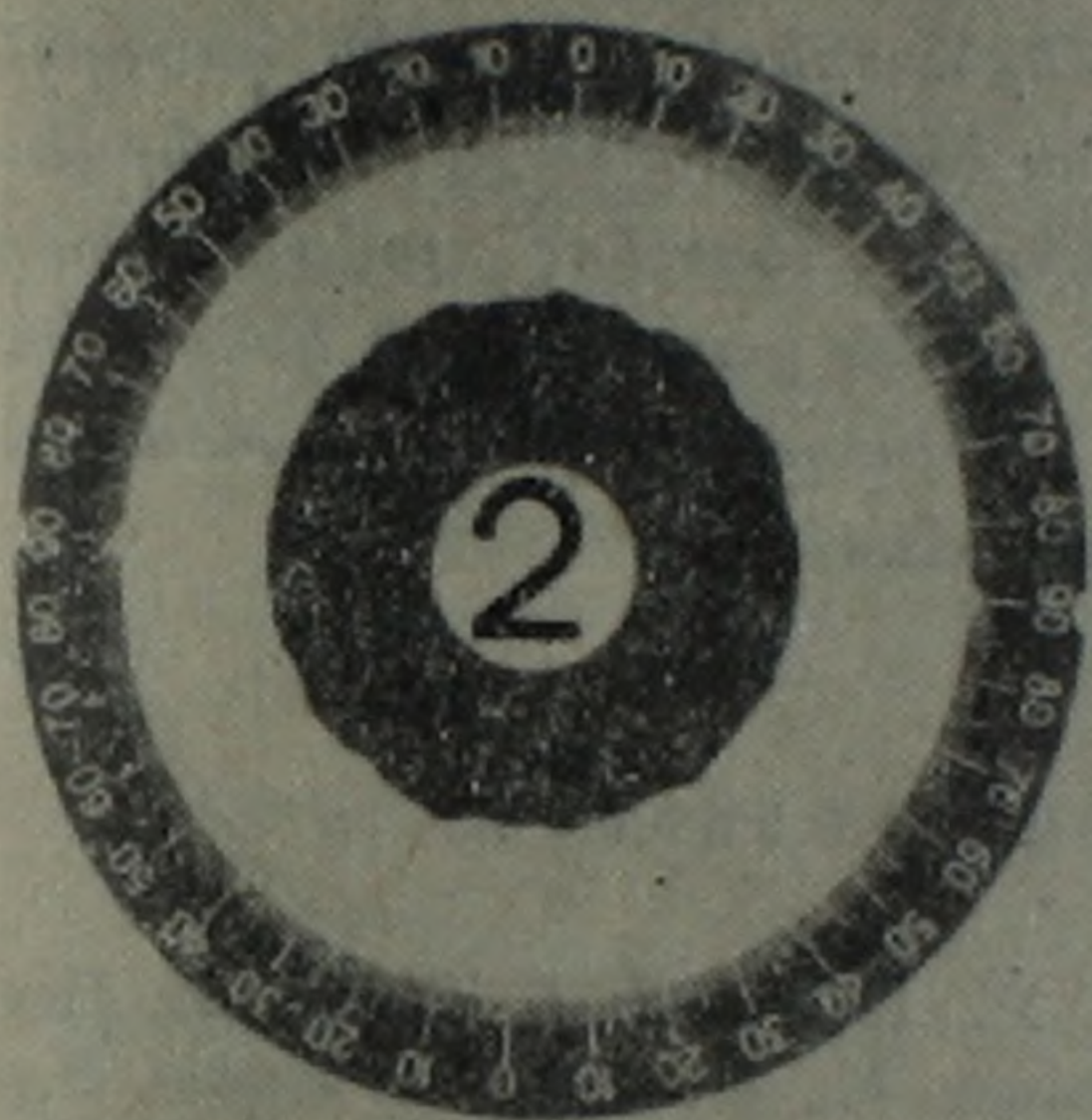
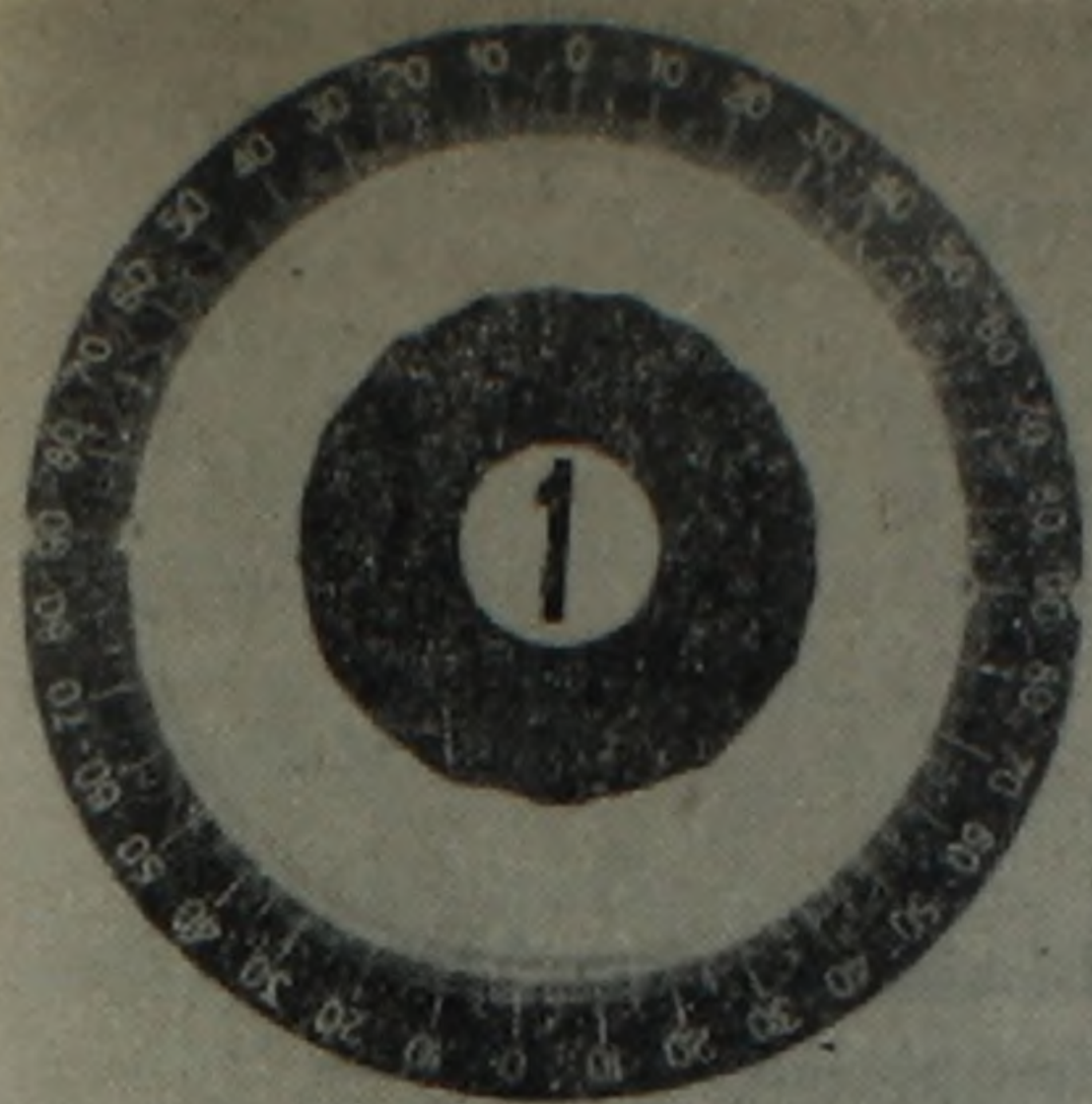


Рис. 1. Форма свободной поверхности жидкости при угловой скорости вращения ротора: 1—785, 2—732; 3—654 рад/с

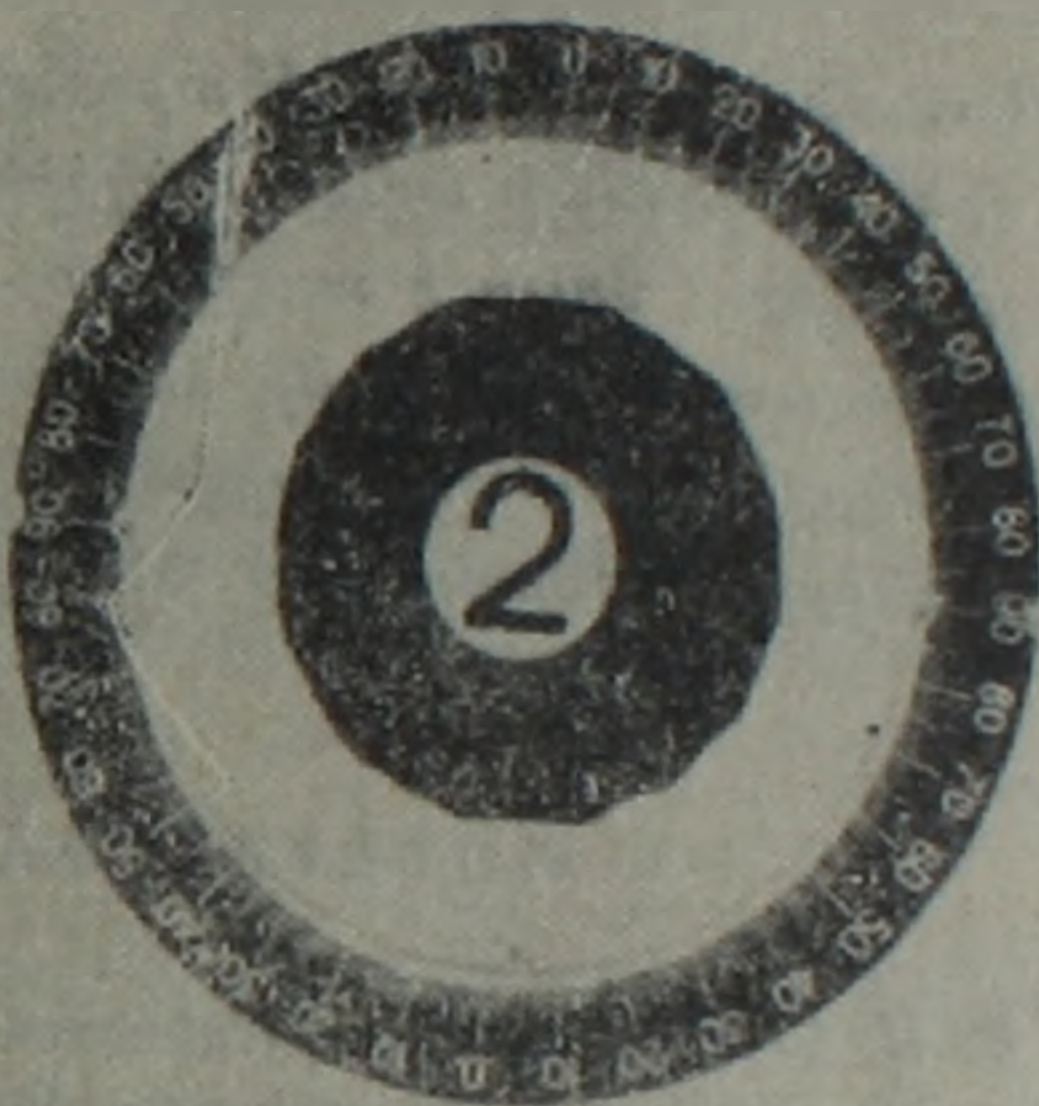
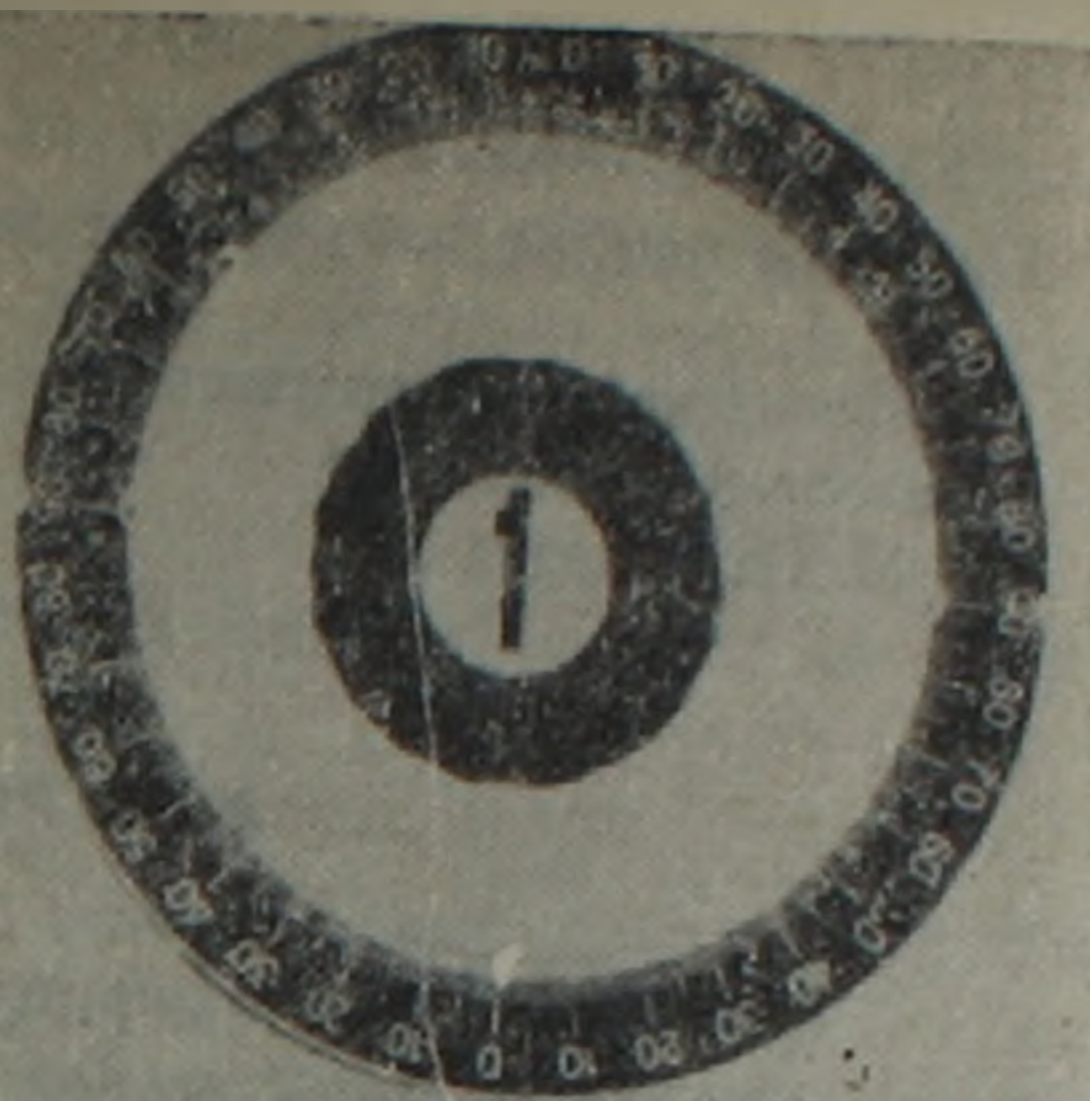


Рис. 2. Форма свободной поверхности при угловой скорости вращения 780 рад/с и радиусе заполнения: 1—0,063; 2—0,077; 3—0,086 м

ным расходом во внутрь ротора; затем ротор вращали в течение 480—600 с. После остановки ротора извлекали фотобумагу и проявляли.

Из рис. 1 следует, что с увеличением угловой скорости вращения форма свободной поверхности изменяется в соответствии с выражением (20), а именно с уменьшением угловой скорости вращения амплитуда стоячих волн уменьшается. На рис. 2 приведены снимки свободной поверхности жидкости при постоянной угловой скорости вращения

ротора, равной 785 рад/с, и при различных радиусах заполнения 0,063; 0,077 и 0,086 м. Из полученных данных следует, что радиус заполнения существенно влияет на форму свободной поверхности жидкости внутри ротора, что также согласуется с (20).

Ленинаканский государственный
педагогический институт
им. М. Налбандяна

Ջ. Ս. ՔՈՐՈՍՅԱՆ

Գլանային կենտրոնախույզ մեխեմաների ոռոտրներում
միասեռ հեղուկի ազատ մակերևույթի ձևի ուսումնա-
սիրությունը

Ուսումնասիրված են կենտրոնախույզ մեքենաների գլանային ոռոտրներում միասեռ հեղուկի ազատ մակերևույթի վրա կենտրոնախույզ մակերևութային ալիքները: Ցույց է տրված, որ մասնակիորեն հեղուկով լցված ոռոտրի ներսում ազատ մակերևույթի ձևը կախված է լցման շառավղից և կենտրոնախույզ իներցիոն ուժերի լարվածությունից: Հետազոտությունից ստացված արդյունքները հիմնավորված են փորձնականորեն:

ЛИТЕРАТУРА — ԿՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ В. И. Соколов, Центрифугирование, Химия, М., 1976. ² Д. Е. Шкоропад, Центрифуги для химических производств, Машиностроение, М., 1975. ³ Н. Е. Кочин, И. А. Кибель, В. В. Розе, Теоретическая гидромеханика. Ч. I, 6-е изд., испр. и доп., Физматгиз, М., 1963. ⁴ Л. Н. Сретенский, Теория волновых движений жидкости. 2-е изд., пер. и доп., Наука, М., 1977. ⁵ Г. Ламб, Гидродинамика, ОГИЗ, М.-Л., 1947. ⁶ Дж. Лайтхилл, Волны в жидкостях, Мир, М., 1981.

