УДК 539.376

ТЕОРИЯ ПОЛЗУЧЕСТИ

С. Е. Мирзоян, С. М. Мхитарян

К задаче контактного взаимодействия между тонкостенным включением конечной длины и плоскостью, находящимися в условиях ползучести

(Представлено академиком АН Армянской ССР Н. Х. Арутюняном 24/VI 1982)

Контактные задачи о взаимодействии тонкостенных включений с массивными телами довольно хорошо изучены (1). Исследование таких задач в постановке теории ползучести с учетом фактора неоднородного старения материалов контактирующих пар сопряжено с значительными трудностями аналитического и вычислительного характера.

В настоящей работе в постановке теории ползучести неоднородно стареющих сред (2,3) рассматривается задача о контактном взаимодействии между тонкостенным включением конечной длины и плоскостью, материалы которых разновозрастны и обладают различными вязкоупругими характеристиками. Дана постановка задачи и выведены основные уравнения. При этом использованы результаты работ (4,5).

1. Пусть однородная плоскость на конечном отрезке оси Ox $[-a, a]$ усилена включением малой толщины h и в точках $z_k = x_k + iy_k$ ($k=1, 2, \dots, N, z_k \neq \pm a$) действуют сосредоточенные силы $P_k = X_k + iY_k$ и, кроме того, на бесконечности в направлениях осей Ox и Oy действуют сжимающие силы интенсивности p и q соответственно. В условиях плоской деформации требуется определить контактные напряжения на участке соединения включения с плоскостью и осевые усилия на концах включения, если включение и плоскость имеют разные вязкоупругие характеристики и возрасты.

Включение будем трактовать как стержень или тонкую пластину, причем согласно (6) примем $1 + h^2/a^2 \approx 1$. Принимаем также, что жесткость включения на изгиб пренебрежимо мала, но ее жесткость на растяжение $E_s(t)$ — величина конечная.

При этих предположениях для включения получим

$$\epsilon_x^{(1)}(x, t) = \frac{1}{E_s(t)} \left[N_1(t) - \int_{-a}^x \tau_s(s, t) ds \right] \quad (-a < x < a); \quad (1.1)$$

$$\tau_s(x, t) = \tau_+(x, t) - \tau_-(x, t), \quad E_s(t) = E_1(t)h/(1 - \nu_1^2).$$

Условие равновесия включения имеет вид

$$\int_{-a}^a \tau_s(s, t) ds = N_1(t) - N_2(t), \quad (1.2)$$

где $N_1(t)$ и $N_2(t)$ неизвестные осевые усилия на концах включения. Для перемещений точек берегов включения имеем ⁽⁷⁾

$$u_1\left(x, \pm \frac{h}{2}\right) = u_1(x, 0) \mp \frac{h}{2} \frac{dv_1(x, 0)}{dx}, \quad v_1\left(x, \pm \frac{h}{2}\right) = v_1(x, 0), \quad |x| < a, \quad (1.3)$$

где $u_1(x, 0)$ и $v_1(x, 0)$ перемещения точек срединной линии включения.

В задаче принимается условие совместности горизонтальных деформаций включения и однородной плоскости с щелью $[-a, a]$, нагруженной по берегам щели нормальными и горизонтальными силами интенсивностей $-q_{\pm}(x, t)$ и $-\tau_{\pm}(x, t)$, исходными сосредоточенными силами и силами на бесконечности. Отметим, что величины с индексом $+$ и $-$ относятся к верхней и нижней полуплоскостям соответственно.

Перемещения же граничных точек верхней и нижней полуплоскостей согласно ⁽⁸⁾ имеют вид

$$u_{\pm}^{\pm}(x, t) = \mp \frac{x+1}{4\pi\mu_2(t)} \int_{-\infty}^{\infty} \ln \frac{1}{|x-s|} \tau_{\pm}(s, t) ds - \frac{x-1}{8\mu_2(t)} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sgn}(x-s) q_{\pm}(s, t) ds \mp f_{\pm}(x, t) \quad (1.4)$$

$$v_{\pm}^{\pm}(x, t) = \pm \frac{x+1}{4\pi\mu_2(t)} \int_{-\infty}^{\infty} \ln \frac{1}{|x-s|} q_{\pm}(s, t) ds - \frac{x-1}{8\mu_2(t)} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sgn}(x-s) \tau_{\pm}(s, t) ds \mp g_{\pm}(x, t) \\ (-\infty < x < \infty).$$

Здесь $f_{\pm}(x, t)$ и $g_{\pm}(x, t)$ перемещения граничных точек полуплоскостей от приложенных к ним сосредоточенных сил и сил на бесконечности.

Условия непрерывности компонентов перемещений берегов включения и плоскости с учетом ползучести имеют вид:

$$(1-L_1)u_1\left(x, \pm \frac{h}{2}\right) = (1-L_2)u_{\pm}^{\pm}(x, 0) \\ (1-L_1)v_1\left(x, \pm \frac{h}{2}\right) = (1-L_2)v_{\pm}^{\pm}(x, 0) \quad (-a < x < a). \quad (1.5)$$

Здесь

$$L_i |Y(t)| = \int_{\tau_0}^t E_i^*(u) K_i(t + \rho_i, u + \rho_i) Y(u) du; \\ K(t, u) = \frac{\partial}{\partial u} \left[E^{-1}(u) + \varphi(u) (1 - e^{-\tau(t-u)}) \right]; \quad (1.6)$$

$$\varphi(u) = C_0 + \frac{A_1}{u}, \quad E_i^*(t) = E_i(t + \rho_i), \quad \rho_i = \tau_i - \tau_0, \quad (i=1, 2);$$

$\tau_i (i=1, 2)$ — возрасты включения и плоскости соответственно.

Из условия (1.5) с учетом (1.1) — (1.4) после некоторых несложных преобразований относительно скачка тангенциальных напряжений на берегах включения получим сингулярное интегро-дифференциальное уравнение следующего вида:

$$(1-L_2) \frac{1}{\pi E_2^*(t)} \int_{-1}^1 \frac{\varphi'(\eta, t) d\eta}{\eta - \xi} = \lambda(1-L_1) \frac{\varphi(\xi, t)}{E_1^*(t)} + h_0(\xi, t), \quad (|\xi| < 1) \quad (1.7)$$

$$\int_{-1}^1 \tau(\eta, t) d\eta = N_1(t) - N_2(t), \quad (1.8)$$

где

$$\varphi(\xi, t) = \int_{-1}^{\xi} \tau(\eta, t) d\eta = \int_{-1}^{\xi} a\tau_s(a\eta, t) d\eta,$$

$$h_0(\xi, t) = -\lambda(1-L_1) \frac{N_1(t)}{E_1^*(t)} - \frac{(x-1)a}{2\pi(1+\nu_2)x} (1-L_2)G(a\xi, t) + \\ + \frac{(x+1)a}{x(1+\nu_2)} (1-L_2)f'(a\xi, t),$$

$$G(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g'(s, t) ds}{s-x}, \quad g'(x, t) = \frac{d}{dx} [g_+(x, t) - g_-(x, t)],$$

$$f'(x, t) = \frac{1}{2} \frac{d}{dx} [f_+(x, t) + f_-(x, t)], \quad \lambda = \frac{(1-\nu_1^2)(x+1)a}{(1+\nu_2)xh}, \quad x = 3-4\nu_2$$

Отметим, что после того, как решено (1.7) — (1.8), нормальные контактные напряжения на берегах включения определяются по формуле

$$\bar{q}(\xi, t) = -\bar{\lambda}(t)(1+R_2)(1-L_1) \frac{\varphi(\xi, t) - N_1(t)}{E_1^*(t)} + \bar{\mu}(t)G(a\xi, t) - \bar{\nu}(t)f'(a\xi, t), \quad (|\xi| < 1) \quad (1.9)$$

где

$$\bar{\lambda}(t) = \frac{(x-1)(1-\nu_1^2)aE_2^*(t)}{2x(1+\nu_2)h}, \quad \bar{\mu}(t) = \frac{(x+1)a\mu_2^*(t)}{2\pi x}, \quad \bar{\nu}(t) = \frac{a\mu_2^*(t)(x-1)}{x},$$

$$\bar{q}(\xi, t) = aq(a\xi, t), \quad \mu_2^*(t) = \mu_2(t + \rho_2), \quad \mu_2(t) = \frac{E_2(t)}{2(1+\nu_2)},$$

а на всей вещественной оси — формулой

$$\bar{q}(\xi, t) = -\frac{x-1}{2\pi(x+1)} \int_{-1}^1 \frac{\tau(\eta, t) d\eta}{\eta - \xi} + \frac{2\mu_2^*(t)a}{\pi(x+1)} G(a\xi, t), \quad (|\xi| < \infty), \quad (1.10)$$

так как $q_+(x, t) = q_-(x, t) = q(x, t)$ при $-\infty < x < \infty$.

В результате сопоставления определяющих соотношений (1.1)–(1.5) получим еще одно сингулярное интегро-дифференциальное уравнение, откуда определяется скачок $\varphi_*(x, t)$ горизонтальных перемещений берегов щели по отрезку $[-a, a]$ в однородной плоскости

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\Psi'(\eta, t) d\eta}{\eta - \xi} = \lambda_* \Psi(\xi, t) + F_*(\xi, t) \quad (|\xi| < 1), \quad (1.11)$$

$$\Psi(-1, t) = \Psi(1, t) = 0, \quad (1.12)$$

где

$$\Psi(\xi, t) = \int_{-1}^{\xi} \varphi'_*(a\eta, t) d\eta, \quad F_*(\xi, t) = F(a\xi, t), \quad \lambda_* = \frac{2a(x+1)}{(x-1)h},$$

$$F(x, t) = (1 - L_2) \left[\frac{2(x+1)}{x-1} g'_0(x, t) + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f'_0(s, t) ds}{s-x} \right],$$

$$g'_0(x, t) = \frac{1}{2} \frac{d}{dx} [g_+(x, t) + g_-(x, t)], \quad f'_0(x, t) = \frac{d}{dx} [f_+(x, t) - f_-(x, t)].$$

После решения (1.11)–(1.12) сумма тангенциальных контактных напряжений определится по формуле

$$T(x, t) = T(a\xi, t) = \frac{8\mu_2^*(t)a}{(x-1)h} (1 + R_2) \Psi(\xi, t) + \frac{8\mu_2^*(t)}{x-1} g'_0(a\xi, t), \quad (|\xi| < 1), \quad (1.13)$$

на вещественной оси — формулой

$$T(a\xi, t) = \frac{4\mu_2^*(t)}{\pi(x+1)} (1 + R_2) \int_{-1}^1 \frac{\varphi'_*(a\eta, t) d\eta}{\eta - \xi} - \frac{4\mu_2^*(t)}{\pi(x+1)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f'_0(a\eta, t) d\eta}{\eta - \xi}, \quad (|\xi| < \infty), \quad (1.14)$$

где $R_2(t + \rho_2, u + \rho_2)$ — резольвента ядра $E_2^*(u)K_2(t + \rho_2, u + \rho_2)$.

Неизвестные осевые усилия $N_1(t)$ и $N_2(t)$ определяются из условия

$$\int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x(-a, y) dy = -N_1(t), \quad \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x(a, y) dy = -N_2(t), \quad (1.15)$$

где $\sigma_x(x, y)$ — горизонтальный компонент поля напряжений в плоскости с щелью $[-a, a]$, вызванного силами $P_k, p, q, -q_{\pm}(x, t), -\tau_{\pm}(x, t)$.

Отметим, что в изложенной постановке задачи существенно использовано свойство тонкостенности включения. А именно, поскольку $h^2/a^2 \ll 1$, то, как в (6), условия непрерывности перемещений и напряжений на длинных сторонах включения удовлетворяются точно, а на его коротких сторонах — лишь интегрально. Последнее и приводит к условиям (1.15), откуда определяются осевые усилия на концах включения.

2. Решение уравнения (1.7)–(1.8) ищем в виде

$$\tau(\xi, t) = \varphi'(\xi, t) = \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} \sum_{n=0}^{\infty} x_n(t) T_n(\xi), \quad (|\xi| < 1). \quad (2.1)$$

Далее известным способом получим бесконечную систему интегральных уравнений Вольтерра второго рода

$$(1-L_2)y_m(t) + (1-L_1) \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_0(t) K_{m,n} y_n(t) = (1-L_1) \lambda_0(t) y_0(t) b_m(t) + H_{0,m}(t), \quad (m=1, 2, \dots) \quad (2.2)$$

где

$$K_{m,n} = \frac{2}{\pi n} \int_{-1}^1 (1-\xi^2) U_{m-1}(\xi) U_{n-1}(\xi) d\xi, \quad b_m = \int_{-1}^1 \left(1 + \frac{2}{\pi} \arcsin \xi \right) \sqrt{1-\xi^2} U_{m-1}(\xi) d\xi$$

$$H_{0,m}(t) = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-\xi^2} U_{m-1}(\xi) h_0(\xi, t) d\xi, \quad y_m(t) = \frac{x_m(t)}{E_2^*(t)}, \quad y_0(t) = \frac{N_1(t) - N_2(t)}{\pi E_2^*(t)}$$

$$\lambda_0(t) = \lambda \frac{E_2^*(t)}{E_1^*(t)}.$$

Аналогичным образом из (1.11)–(1.12) получим бесконечную систему следующего вида

$$z_m(t) + \lambda_* \sum_{n=1}^{\infty} K_{m,n} z_n(t) = a_m(t), \quad z_0(t) = 0, \quad (2.3)$$

где

$$a_m(t) = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 F_*(\xi, t) \sqrt{1-\xi^2} U_{m-1}(\xi) d\xi, \quad (m=1, 2, \dots).$$

3. Исследуем теперь регулярность бесконечных систем (2.2) и (2.3). Введем в рассмотрение вещественное пространство всех ограниченных последовательностей непрерывных функций m_e , определенных на отрезке $[\tau_0, T]$, т. е.

$$y(t) = \{y_n(t)\}_{n=1}^{\infty} \in m_e, \quad \text{если } |y_n(t)| \leq M_x, \quad \text{при всех } n \text{ и } t$$

Расстояние между двумя точками m_e введем формулой

$$\rho(x, y) = \sup_t \sup_n |x_n(t) - y_n(t)|.$$

Можно доказать, что определенное таким образом расстояние существует и удовлетворяет всем аксиомам метрики, а m_e — полное метрическое пространство ⁽⁹⁾, в котором применительно к данному случаю можно провести принцип неподвижной точки Банаха.

Опуская промежуточные выкладки, запишем условие сжимаемости соответствующего оператора или условие полной регулярности системы (2.2), которое имеет следующий вид ⁽⁹⁾:

$$\sup_m \sum_{n=1}^{\infty} |K_{m,n}| \sup_t \left[\lambda_0(t) + \int_{\tau_0}^t |R_2(t+\rho_2, u+\rho_2)| \lambda_0(u) du \right] + \quad (3.2)$$

$$+ \lambda \sup_m \sup_t \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\tau_0}^t [|G_{m,n}(t, u)| + |R_{m,n}(t, u)|] E_2^*(u) du < 1,$$

где

$$G_{m,n}(t, u) = K_{m,n} \cdot K_1(t+\rho_1, u+\rho_1), \quad R_{m,n} = \int_u^t R_2(t+\rho_2, v+\rho_2) G_{m,n}(v, u) dv.$$

Легко доказать, что при условии $\lambda_* < \sqrt{6}/\pi$ бесконечная система (2.3) будет вполне регулярной.

4. Для определения $N_1(t)$ и $N_2(t)$ имеем систему (1.15), которую после некоторых преобразований можно представить в виде

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a q(s, t) \sqrt{\frac{a+s}{a-s}} ds + \frac{3\tau_s^*(a, t)}{4} + c_1(t) + c_0 a = -N_2(t) \sqrt{a}/\sqrt{2h}; \quad (4.1)$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a q(s, t) \sqrt{\frac{a-s}{a+s}} ds - \frac{3\tau_s^*(-a, t)}{4} - c_1(t) + c_0 a = -N_1(t) \sqrt{a}/\sqrt{2h},$$

где

$$c_0 = -q/2, \quad c_1(t) = -\frac{(x-1)[N_1(t) - N_2(t)]}{4\pi(x+1)}, \quad \tau_s^*(\pm a, t) = \lim_{\xi \rightarrow \pm 1} \sqrt{1-\xi^2} \varphi'(\xi, t).$$

Подставляя значения $q(x, t)$ и $\tau_s^*(\pm a, t)$ из (1.9) и (2.1) в (4.1), получим систему интегральных уравнений Вольтерра второго рода, откуда и определяются неизвестные $N_1(t)$ и $N_2(t)$.

Институт механики
Академии наук Армянской ССР

Ս. Ե. ՄԻՐԶՈՅԱՆ, Ս. Մ. ՄԵԻՔԱՐՅԱՆ

Սողի պայմաններում գտնվող բարակապատ վերջավոր երկարության ներդրակի և համասեռ հարթության կոնտակտային փոխազդեցության խնդրի մասին

Աշխատանքում դիտարկվում է բարակապատ վերջավոր երկարության ներդրակի և համասեռ հարթության կոնտակտային փոխազդեցության խնդիրը, երբ ներդրակը և հարթությունը օժտված են տարբեր առաձգամածուցիկ հատկություններով և ունեն տարբեր հասակներ:

Անհայտ շոշափող լարումների թռիչքի նկատմամբ ստացված է սինգուլյար ինտեգրալ-դիֆերենցիալ և Վոլտերայի ինտեգրալ հավասարումներ: Զերիչևի օրթոգոնալ բազմանդամների մեթոդի օգնությամբ վերջինս բերված է

Վոլտերայի երկրորդ սեռի ինտեգրալ հավասարումների անվերջ սիստեմի և հետազոտված է այդ սիստեմի ռեզոլյարուիթյան հարցը: Ստացված է նաև հավասարումների սիստեմ, որտեղից որոշվում են ներդրակի ժայրակետերում առաջացող անհայտ ճիգերը:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ Развитие теории контактных задач в СССР, Наука, М., 1976. ² Н. Х. Арутюнян, МТТ, № 3 (1976). ³ Н. Х. Арутюнян, Теория ползучести неоднородно-стареющих тел, Изд. ИПМ АН СССР, препринт № 170, М., 1981. ⁴ С. Е. Мирзоян, С. М. Мхитарян, Изв. АН АрмССР. Механика, № 5 (1981). ⁵ С. Е. Мирзоян, в сб.: Исследования по механике твердого деформируемого тела, Изд. АН АрмССР, Ереван, 1981. ⁶ А. И. Лурье, Теория упругости, Наука, М., 1970. ⁷ В. В. Новожилов, Теория тонких оболочек, Судпромгиз, 1962. ⁸ Н. И. Мухелишвили, Некоторые основные задачи математической теории упругости, Наука, М., 1966. ⁹ Л. А. Люстерник, В. И. Соболев, Элементы функционального анализа, Наука, М., 1965.